

平成 30 年 6 月 20 日現在

機関番号：15501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K17557

研究課題名(和文) パンルヴェ階層の完全WKB解析

研究課題名(英文) The exact WKB analysis for Painleve hierarchies

研究代表者

梅田 陽子 (Umeta, Yoko)

山口大学・大学院創成科学研究科・助教

研究者番号：90606386

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究において4つのパンルヴェ階層のインスタントン解の構成に成功した。更に高階パンルヴェ方程式のインスタントン解の構成法, 解の共通構造を調べるために, 新しい方程式系「a unified family of P_J-hierarchies」を導入した。導出したシステムを対象として, 高階パンルヴェ方程式のインスタントン解構成法並びにStokes幾何を研究した。システムに対し, 非線形のStokes幾何と付随するLax対のStokes幾何との間に成立する構造「非線形の変わり点, Stokes曲線上の点で, 対応するLax対のStokes幾何に必ず退化現象が観測される」を証明した。

研究成果の概要(英文)：We study higher order Painleve equations from a view point of the exact WKB analysis. Instanton-type solutions are constructed for P_J-hierarchies(J=I, II, IV, 34). To study the common structures between the P_J-hierarchies, a unified family of P_J-hierarchies (J=I, II, IV, 34) is introduced. By using the system, we study a construction of instanton-type solutions for Painleve hierarchies. We also proved that the Stokes geometry of the system has the following intrinsic relationship with its underlying Lax pair: If t (t is the variable of unknown functions) lies on a Stokes curve of non-linear ordinary differential equations, some degenerate phenomenon occurs in the Stokes geometry of the underlying Lax pair.

研究分野：数学, 基礎解析学

キーワード：完全WKB解析 漸近解析 非線型方程式 パンルヴェ階層 インスタントン解 ストークス幾何 Lax pair
ir ストークス現象

1. 研究開始当初の背景

完全 WKB 解析が有効な非線型方程式の 1 つとしてパンルヴェ方程式が挙げられる。1990 年代に青木、河合、竹井は(大きなパラメータを導入した)パンルヴェ方程式に対する完全 WKB 解析の理論を構築した。その後、竹井、河合、小池らによる 4 つのパンルヴェ階層 $(P_J)_m$ ($J=I, II, IV, 34$)、野海山田方程式の研究、青木、本多らによる野海山田方程式の変わり点、Stokes 幾何の研究等、完全 WKB 解析を高階パンルヴェ方程式へ拡張するための基礎研究が行われ、完全 WKB 解析は高階パンルヴェ方程式の解析に有効であることが明らかにされてきた。現在は更に一般に、非線型可積分系に対する完全 WKB 解析の理論の整備が求められている。

2. 研究の目的

大きなパラメータを持つパンルヴェ方程式やその高階版といった非線型可積分系の解の大域構造は以下の情報により解析可能となる。

- (a) 変わり点と Stokes 曲線から成る Stokes 幾何と呼ばれる幾何学的対象の詳細な情報。
- (b) Stokes 曲線上で成立する接続公式と呼ばれる解の間の解析的關係。

しかし (a), (b) に関して次の重要な課題が存在する。

(I) Stokes 幾何に関する問題

非線型方程式 (特に対応する Lax 対が高階線型方程式の場合) の Stokes 幾何は、2 階線型方程式の場合と大きく異なり、新しい種類の Stokes 曲線、2 種類の変わり点、仮想変わり点を含むため、解明すべき点が多い。

(II) インスタントン解に関する問題

パンルヴェ階層の解の接続問題を議論する際、インスタントン解と呼ばれる十分多くの自由パラメータを含む形式解を必要とする。しかしインスタントン解の構成は自明でない。またその解の特異点の位置を正確に知

る必要があるが、非線型故に、2 種類の変わり点以外に多くの特異点を持つ可能性があり、特異点の位置の解明は一般に難しい。

この問題は線型方程式では観測されない、非線型特有の興味深い問題である。

このような経緯のもと、本研究では、高階パンルヴェ方程式のインスタントン解と縮退をもつ Stokes 幾何の研究に焦点をあてて次の問題に取り組む。

(1) インスタントン解構成法の研究

インスタントン解の構成は非線型方程式に対して完全 WKB 解析を行う出発点である。先行研究で青木、本多と多重スケール解析を用いて、I 型パンルヴェ階層 $(P_I)_m$ のインスタントン解を構成することに成功した。開発した構成方法がどのような微分方程式のクラスまで適用出来るかを明らかにする。

(2) 非線型方程式の Stokes 幾何、第 1 種変わり点、第 2 種変わり点、縮退をもつ Stokes 幾何の研究

非線型の Stokes 幾何と付随する Lax 対の Stokes 幾何との間に成立する構造「非線型の変わり点、Stokes 曲線上の点で、対応する Lax 対の Stokes 幾何に必ず退化現象が観測される」を解明する。

(3) パンルヴェ階層のインスタントン解の特異性を解明する。

本研究の目的は、上記の問題を研究し、非線型可積分系の完全 WKB 解析の理論を発展させることである。

3. 研究の方法

以下の(1),(2),(3)は 2. 研究の目的で述べたそれぞれの問題に対応している。

- (1),(3): 先行研究で開発した方法で解を構成するためには、構成過程において自然に現れる永年方程式と呼ばれる代数方程式を解く必要がある。永年方程式の可解性の条件を突き止めることができれば解構成法の適用範

困を特定できる. そのために, $(P_I)_m$ に対するインスタントン解構成法を他のパンルヴェ階層 $(P_J)_m (J=II, IV, 34)$ に適用し, それぞれの構成過程に現れる共通構造を調べることから始める. 解の特異性の問題については, 本研究代表者は「ある一般的な条件の下では, $(P_J)_m$ のインスタントン解の係数に現れる特異点は変わり点のみである」と予想している. この予想を証明するためには, 非線型方程式に一般に頻出する小分母問題が $(P_J)_m$ の場合は起こらないことを証明しなければならない. 証明のヒントは解の構成過程に存在すると考えている. 解の構成過程における, 変わり点の定義式と零パラメータ解の主部が満たす代数方程式と永年方程式の各々の役割を明確にする. また, この方法での解明が難しい場合は, 小池の論文(2007)を参考にする. 小池は $(P_J)_m$ は退化ガルニエ系の独立変数の制限であるという事実を発見した. 退化ガルニエ系の制限という観点から多面的に問題に取り組む.

(2): 4つのパンルヴェ階層 $(P_J)_m (J=I, II, IV, 34)$ (河合, 小池, 西川, 竹井 2004) と野海山田方程式(竹井 2004), (本多 2006, 2007)の研究が高階パンルヴェ方程式の Stokes 幾何の先駆的な仕事である. これらの仕事を参考に, Lax 対をもつ非線型方程式の Stokes 幾何において共通に観測される普遍的性質を調べることから始める.

4. 研究成果

(1) 論文③と論文⑦:

$(P_I)_m$ に対する青木, 本多, 梅田の方法を用いて, 3つのパンルヴェ階層 $(P_J)_m (J=II, IV, 34)$ のインスタントン解の構成に成功した. さらに4つの解は統一的に記述できることを証明した. 解の特異性の解明までには至らなかったが, それぞれの解の低階項については小分母が消えてしまい, 先に述べたインスタントン解の特異性に関する予想を肯定する結果が観測された.

(2) 論文④と論文⑤:

4つのパンルヴェ階層 $(P_J)_m$ のインスタントン解の共通構造を調べるために, 「a unified family of P_J -hierarchies ($J=I, II, IV, 34$)」という名の system を導入した. このシステムの特徴は方程式が未知関数の母関数で記述されており, 4つのパンルヴェ階層の共通構造を保つよう拡張されたシステムである. この拡張したシステムに対してインスタントン解を構成することに成功した. システムは任意係数をもつため, システムから多くの非線型常微分方程式を導出することができる. 従って我々の $(P_J)_m$ に対す

る解の構成方法をこのシステムにまで拡張したことになる. また, 論文では解のさまざまな共通構造についても述べている.

(4) 論文②

研究問題(2)を研究するため, 論文①で導入した拡張システムに対して Lax 対の具体的な形の導出に成功した. また導出した Lax 対の Stokes 幾何と非線型側の Stokes 幾何の研究を行い, 次の縮退現象を証明した.

- (i) 非線型の第1種変わり点において, 対応する Lax 対の2重変わり点と単純変わり点が合流する.
- (ii) 非線型の第2種変わり点において, 対応する Lax 対の2つの2重変わり点が合流する.
- (iii) 一般的な仮定の下, 非線形の Stokes 曲線上の点において, 対応する Lax 対の2つの変わり点が Stokes 曲線で結ばれるという退化現象が起こる.

Lax 対の両立条件として表される非線型方程式の Stokes 幾何がもつ普遍的性質の研究に関連して, 本論文は4つのパンルヴェ階層と野海山田方程式以外の例として重要である.

(5) 論文④

論文①で導出したシステムは4つのパンルヴェ階層以外の高階パンルヴェ方程式を含むのか?という新たな問題が来た. この問題を研究するため, 導出した system に付随する Schrödinger 方程式と変形方程式の具体的な形を導出した. その結果, 導出したシステムは4つのパンルヴェ階層 $(P_J)_m (J=I, II, IV, 34)$ と変形方程式の形は同じで, Schrödinger 方程式のポテンシャルの形に違いがあることを明確にした. この結果により, パンルヴェ階層と変形方程式は同じで, 本論文で述べるように Schrödinger 方程式のポテンシャルを変形した場合まで, 野海山田方程式, 4つのパンルヴェ階層に共通して観測される幾何学構造が保たれるという主張が導かれた.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

① Yoko Umeta, General formal solutions for a unified family of (P_J) -hierarchies ($J=I, II, IV, 34$), 査読有, Journal of the Mathematical Society of Japan, to appear. DOI: <http://mathsoc.jp/publication/JMSJ/pdf/JMSJ7856.pdf>

② Yoko Umeta, On the Stokes geometry of a unified family of (P_J) -hierarchies ($J=$

I, II, IV, 34), 査読有, Publ. Res. Inst. Math. Sci., to appear.

③Yoko Umeta, Instanton-type solutions of $P_{\{34\}}$ -hierarchy with a large parameter, 査読有, RIMS Kokyuroku Bessatsu, to appear.

④Yoko Umeta, A certain property of a unified family of P_J -hierarchies ($J=I, II, IV, 34$) with a large parameter, Submitted.

⑤Yoko Umeta, A unified family of P_J -hierarchies ($J = I, II, IV, 34$) with a large parameter, 査読無, RIMS Kokyuroku, No. 2020 (2017) 92--96.

⑥Shinichi Tajima, Yoko Umeta, Computing structures of holonomic D -modules associated with a simple line singularity, 査読有, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B57 (2016) 125--140.

⑦Yoko Umeta, Instanton-type formal solutions for the second and the fourth Painleve hierarchies with a large parameter, 査読有, Journal of the Mathematical Society of Japan, Vol. 67, No. 3 (2015) 943--978.

[学会発表] (計 15 件)

①Yoko Umeta, An introduction to exact WKB analysis, Bilateral Mini-Workshop of NTNU and Yamaguchi University of Mathematics and its Applications, 台湾師範大学(台北市, 台湾), 2017年12月25日

②梅田 陽子, 完全 WKB 解析による高階パルヴェ方程式の研究, 山口複素解析セミナー, 山口大学工学部 (山口県宇部市), 2017年12月15日

③梅田 陽子, Lax pair をもつ非線形方程式の完全 WKB 解析, 第1回岡潔女性数学者セミナー, 奈良女子大学(奈良県奈良市), 2017年12月2日

④Yoko Umeta, Stokes geometry for a unified family of some Painleve hierarchies, Algebraic Analysis in Yamaguchi- D -module, microlocal analysis, summability-, かんぽの宿湯田(山口県山口市), 2017年11月17日

⑤梅田 陽子, 4つの Painleve 階層を含むシステムのストークス幾何, Workshop on Accessory Parameters, 東京大学玉原国際セミナーハウス(群馬県沼田市), 2017年10月7日

⑥梅田 陽子, 4つの Painleve 階層を含むシステムのストークス幾何, 理工学部数学科 談話会, 東京理科大学(千葉県野田市), 2017年1月27日

⑦梅田 陽子, 4つの Painleve 階層を含むシステムのストークス幾何, 複素解析セミナー, 広島大学(広島県東広島市), 2016年12月23日

⑧梅田 陽子, 4つの Painleve 階層を含むシステムのストークス幾何, 代数解析奈良研究集会, 奈良女子大学(奈良県奈良市), 2016年11月26日

⑨Yoko Umeta, Stokes geometry for a unified family of some Painleve hierarchies, New development of microlocal analysis and singular perturbation theory, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市), 2016年10月5日

⑩梅田 陽子, 完全 WKB 解析とインスタント解, 岡山大学 COR セミナー, 岡山大学(岡山県岡山市), 2016年1月14日

⑪梅田 陽子, ストークス曲線同士の接触の縮退について, 金沢山口数学合同研究集会, 金沢大学サテライト・プラザ(石川県金沢市), 2016年12月20日

⑫Yoko Umeta, Instanton-type solutions for a unified family of $(P_J)_m$ ($J = I, II, IV, 34$), Algebraic analysis methods in complex partial differential equations,

京都大学数理解析研究所(京都府京都市),

2016年12月11日

⑬梅田 陽子, Multiple-scale analysis for some class of systems of non-linear differential equations, 広島複素解析セミナー, 広島大学(広島県東広島市), 2016年11月27日

⑭梅田 陽子, 大きなパラメータを含むパンルヴェ階層のインスタント解について, 数理科学談話会, 山口大学(山口県山口市), 2016年11月11日

⑮Yoko Umeta, Multiple-scale analysis for a unified family of $(P_J)_m$ ($J=I, II, IV, 34$), Algebraic Analysis and Related Topics, 北海道大学(北海道札幌市), 2016年10月15日
〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

梅田 陽子 (UMETA Yoko)

山口大学・大学院創成科学研究科・助教

研究者番号: 90606386

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし