

平成 30 年 6 月 26 日現在

機関番号：32702

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K17558

研究課題名(和文)シュレディンガー発展方程式に向けた抽象論の建設

研究課題名(英文)Construction of abstract theory for Schrodinger evolution equations

研究代表者

吉井 健太郎 (Yoshii, Kentarou)

神奈川大学・工学部・非常勤講師

研究者番号：00632449

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円

研究成果の概要(和文)：当初の目的である抽象論の建設は達成されず、成果の中心として掲げられるものを得ることはできなかったが、その途上においていくつかの小成果を得ることができた。

1つは、シュレディンガー発展方程式のある種の最適制御問題の可解性を明らかにした。また、リパルシブ・ハミルトニアンの研究に関して、ある種の散乱理論を部分的に拡充する結果を得た。これらの研究は基礎解析学に属するだけでなく、応用においても重要な土台となる。

研究成果の概要(英文)：We could not construct abstract theory for Schrodinger evolution equations. However, we obtained small results.

One is the solvability of a kind of optimal control problem for Schrodinger evolution equations. Next one is the partial expansion of the scattering theorem for Repulsive Hamiltonian. These studies are important foundations in applied analysis.

研究分野：数物系科学

キーワード：抽象発展方程式 シュレディンガー発展方程式 双曲型制御問題 リパルシブ・ハミルトニアン

1. 研究開始当初の背景

物理学・工学をはじめとする多くの自然科学の分野において、現象の解明はその背後にある偏微分方程式の推測と推測された偏微分方程式の解析によってなされる。そして推測の妥当性は実験や観察により補強され、解析の正当性は数学によって保証される。

現象の解明が科学技術の発展をもたらす、科学技術の発展が時として我々の社会に予想もできない禍福をもたらす。ともあれ、自然科学とその周辺の研究分野では日々様々な偏微分方程式が実験や観察から、または純粋な数学の問題として提唱され、解析されている。

現在の偏微分方程式は放物型・楕円型・双曲型の型に大別されているが、いずれの偏微分方程式の研究においても、最初に考察される事柄は初期値境界値問題と、その問題の解の一意性であることは共通している。それにもかかわらず、10の問題に10の方法で研究が進められているのが現状である。これは研究開始当初、及び現在も変わりがないように思われる。

2. 研究の目的

本研究代表者の目的は上述の背景であげた10の問題に対して1つの方法で研究を進めることを可能にする新たな抽象論の構築である。本研究ではその一里塚として、シュレディンガー発展方程式

$$\sqrt{-1}\partial_t u - \frac{1}{2}\Delta_x u = f(t, x, u)$$

の初期値問題に適用される新たな抽象論の構築を目標とした。

シュレディンガー発展方程式は量子力学における自由粒子のふるまいを記述する基礎的な方程式の一つとして知られ、上述の大別では双曲型発展方程式に分類される。また、シュレディンガー発展方程式と関連の深い方程式としてディラック方程式やクライン-ゴルドン方程式などが知られており、どちらも双曲型発展方程式に大別される方程式である。目標の抽象論はこれら様々な方程式に対する統一的な解法を与え、今後の偏微分方程式の研究の効率化に寄与するだけでなく、数理物理学に対する数学からの俯瞰的な視点の獲得に寄与もする。

3. 研究の方法

抽象論に関する先行研究を踏まえつつ、それらとは異なる新たな抽象定理を構築するために、シュレディンガー発展方程式とその周辺に関する非線形問題や制御問題、リパルシブ・ハミルトニアン等の研究を行った。また、放物型発展方程式の抽象論に関しては、

近年いくつかの抽象論が提唱されているので、それらの最新の成果について放物型発展方程式の研究者と意見交換を行い、双曲型発展方程式に対応する抽象論の構築の可能性を検討した。

4. 研究成果

(1) 上述の背景であげた初期値境界値問題は偏微分方程式と初期条件・境界条件から構成される問題であるが、議論の中心となるのは偏微分方程式であることが多い。初期条件の一般化である一般コーシー条件と放物型発展方程式を組み合わせた一般コーシー問題の解析が

[BMT] I. Benedetti, L. Malaguti and V. Taddei, Nonlocal semilinear evolution equations without strong compactness: theory and applications, Bound. Val. Prob. 2013 60 (2013), 1-18.

をはじめいくつかの論文中において議論され、年齢を考慮した人口変動モデルなどへの応用が考察されている。これはシュレディンガー発展方程式とは異なる型の発展方程式に関連する研究であるため、そのままシュレディンガー発展方程式について同様の問題を考察することはできなかったが、

[OY] N. Okazawa and K. Yoshii, Linear Schrödinger evolution equations with moving Coulomb singularities, J. Differential Equations 254 (2013), 2964-2999.

の援用により双曲型発展方程式についても同様の解析を行うことができ、シュレディンガー発展方程式の非局所問題の可解性に関する結果を得た。

また、副次的な成果として、ある種の制御問題に関する結果を得た。制御問題については既存の放物型発展方程式に対して課せられていた制限条件のいくつかは放物型特有のものであり、双曲型においては不要であることも明らかにすることができた。

(2) シュレディンガー発展方程式の初期値問題の研究において、方程式を主要項とそれに付随する摂動項に分けて考察するのが常であるが、その区分をどのように扱うかは偏微分方程式の解析だけでなく、抽象論の考察においても肝要な部分となる。

シュレディンガー発展方程式の一種にリパルシブ・ハミルトニアンと呼ばれる形の主要項を備えたものがあるが、近年この主要項に関する研究が

[I] A. Ishida, On inverse scattering problem for the Schrödinger equation with

repulsive potentials, J. Math. Phys., 55 (2014), 082101.

をはじめとして散乱理論の研究に関連して活発になっている。

それらの研究を踏まえ、リパルシブ・ハミルトニアンとそれに付随可能な摂動項についての研究を行った。結果、1次元に限定した場合であるがこれまで付随可能と見なされていなかったいくつかの特殊な摂動項についても付随可能であることが明らかとなった。

今回の結果は常微分方程式に関する既知の方法の援用によるものであったが、散乱理論に関する新たな手法の提案ができた。

(3) 放物型発展方程式の抽象論に関して、近年、

[T] N. Tanaka, The abstract Cauchy problem for dissipative operators with respect to metric-like functionals, J. Math. Anal. Appl. 421 (2015), 539–566.

など、距離空間や距離に類似した性質を備えた空間における作用素半群の理論が研究されている。それらの最新の成果について放物型発展方程式の研究者と意見交換を行い、双曲型発展方程式に対応する抽象論の構築の可能性を検討した。これについてはまだ現状では成果と言えるものは得られていないが、今後の研究課題としたい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 0 件)

〔学会発表〕(計 7 件)

K. Yoshii

An Embedding Estimate for the Repulsive Hamiltonian, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会, 関西大学(大阪府), 2016 年 9 月 18 日

K. Yoshii

An Embedding Estimate for the Repulsive Hamiltonian, 11th AIMS International Conference on DSDEA (国際学会), Orlando(USA), 2016 年 7 月 2 日

K. Yoshii

Nonlocal solutions of hyperbolic type equations, 作用素論セミナー, 京都大学数理解析研究所(京都府), 2015 年 10 月 30 日

K. Yoshii

Nonlocal solutions of hyperbolic type

equations, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 京都産業大学(京都府), 2015 年 9 月 16 日

K. Yoshii

On the abstract evolution equations of hyperbolic type, ICCNODEA (国際学会), Cluj-Napoca (Romania), 2015 年 7 月 16 日

K. Yoshii

Nonlocal solutions of hyperbolic type equations, Equadiff 2015(国際学会), Lyon(France), 2015 年 7 月 7 日

K. Yoshii

On the abstract evolution equations of hyperbolic type (招待講演), Seminari DMI 2015, Perugia(Italy), 2015 年 5 月 19 日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等 なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者
吉井 健太郎 (Yoshii Kentarou)
神奈川大学・工学部・非常勤講師
研究者番号: 00632449

(2) 研究分担者 ()

研究者番号:

(3) 連携研究者 ()

研究者番号：

(4)研究協力者 ()