様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　５ 月 １４ 日現在

機関番号：３７１１１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ１７５６２

研究課題名（和文）確率過程のゲージ理論

研究課題名（英文）Gauge Theory of Stochastic Processes

研究代表者
天羽　隆史（Amaba, Takafumi）

福岡大学・理学部・講師

研究者番号：１０７３７５３９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：1．Levy過程の滑らかでない関数をClark-Ocone公式を時間に関して離散近似するスキームの強収束精度が、その汎関数のSobolev指数の半分のオーダーを持つことを示した。2．制御型Loewner-Kufarev方程式というクラスを導入した。その解を佐藤-Segal-Wilson Grassmannianに埋め込み、その時間発展をGrunsky係数の明示公式を与えることによって記述した。3．確率微分方程式の解(定常Gauss過程)の関数を、時間に関して積分するという操作は、その被積分Wiener汎関数の滑らかさを少なくとも1(0.5)だけ上げることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
1はオプションのペイオフ関数の近似において、その関数が滑らかでないときにも、その少ない滑らかさに応じて近似の精度を具体的に保証するという意味で実務的にも有意義である。2はこれまで確率論の文脈においては統計モデルのみに用いられていたLoewner方程式の、無限可積分系における立ち位置を示唆しているように見える、という意味で分野を横断して意義がある。3や4は機械学習の中でもGauss過程回帰モデルの文脈においてlength scaleと呼ばれるハイパーパラメータを、Rice公式とMC法を用いて推定する際に、その精度を保証することに繋がるため、このモデルを実装する社会の様々な文脈において有用である。

研究成果の概要（英文）：1. It is proven that the scheme approximating an irregular function of a Levy process by discretizing the Clark-Ocone formula with respect to time has the strong-convergence rate given by half of the Sobolev index of the functional (Joint with Nien-Lin Liu, Azmi Makhlouf and Takwa Saidaoui). 2. We have introduced a class which we call controlled Loewner-Kufarev equation. We embedded the solution to the Sato-Segal-Wilson Grassmannian accoding to the procudure of Krichever, and then we described the time-evolution in the Grassmannian and obtained an explicit formula describing the associated Grunsky coefficients (Joint with Roland Friedrich). 3. We proved that integration with respect to time of the function of a solution to a stochastic differential equation (or smooth stationary Gaussian process and its derivative) raise the Sobolev index by 1 (1/2 respectively) than that of the integrand (Joint with Yoshihiro Ryu and Kratz Marie).

研究分野：確率解析学

キーワード：超関数に対する伊藤の公式　Wiener汎関数の正則化　Malliavin解析　双対確率流　Loewner-Kufarev方程式　Grunsky係数　tau関数

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

1) 共形場理論や統計物理学との接点を引き金に Stochastic Loewner Equation (SLE) の研究が非常に盛んであった。特に共形場理論との繋がりを意識したループ空間や、単位円周上の向きを保つ微分同相群の上の確率解析学の萌芽的研究が Malliavin 等によって為されていたが、これら二つのアプローチの間には明確な繋がりは知られていなかった。

2) 確率微分方程式の理論は Rough Path 理論などに代表されるように、一意的強解を持つ場合によく研究されていたが、弱解は存在して一意だが強解は持たない、という場合に道ごとに解の構造を調べるという研究は、駆動する Brown 運動だけでは原理的に解が記述できないという事情もあり、それほどなかった。

3) 古典力学の確率的な拡張の一つとして、Bismut 等により前進・後退確率微分方程式の形で現れる確率ハミルトン系が議論されていたが、これを解くことに関わる多くの研究は、これを自由度有限の系として求積するものであった。

２．研究の目的

1) 本研究の一つの目的は、Loewner-Kufarev 方程式を(SLE とは異なる方法で)ランダムにすることでループ空間の上に確率測度を導入し(この方法は SLE からのアイデア)、Malliavin や Kontsevich からのアイデアを踏襲してその共形不変性や共形制限性を変数変換(やその無限小バージョンである部分積分公式)の側から研究することで Virasoro 代数の表現がどのように関係してくるのかを明らかにすることである。

2) 確率微分方程式の解が強解でない、つまり駆動関数である Brown 運動の情報だけでは記述できないという状況は、確率微分方程式に対する Galois 理論のようなものがあることを示唆している。この研究の目的は、この Galois 理論の定式化をすることにある。

3) この研究における目的は、確率解析学に現れる様々な(``可積分”と呼ばれる)方程式を、広く無限可積分系の一部だという立場から研究し、そこに現れるであろう代数的な構造を Lie 環などの作用で記述することにある。

３．研究の方法

1) この研究を遂行するために、まず Loewner-Kufarev 方程式の上手いパラメータ付けを選ぶ。このとき G. Segal and G. Wilson.``Loop groups and equations of KdV type.”(Inst. Hautes tudes Sci. Publ. Math. No. 61, pp.5-65, 1985)に従って、Loewner-Kufarev 方程式の解を Segal-Wilson Grassmannian に埋め込み、Loewner-Kufarev 方程式に沿った、この Grassmannian 内での軌跡を Virasoro 代数の作用で記述できないか調べる。また、L. P. Teo の研究を参考にして、Malliavin の canonic diffusion に対応する共形溶接問題を解き、対応する共形写像を Loewner-Kufarev 方程式で記述する。

2) 強解を持たない確率微分方程式の解の変換群を記述しようとする際の大きな問題点の一つは、解を記述するために標準的に固定された確率空間がないことにある。つまり同一の確率空間の間の変換として記述することが難しい。この問題点を打破するために、二つの解(従って二つの確率空間)が与えられたときに、山田-渡辺の定理の証明に現れる「それぞれを駆動している Brown 運動を同一視してこれらの確率空間を貼りあわせることで新しい確率空間を得る」という図式の射影極限として確率空間を固定して、その上での変換群を考えるという着想に至った。射影極限として得られる確率空間の記述は B. S. Tsirelson and A. M. Vershik.``Examples of nonlinear continuous tensor product of measure spaces and non-Fock factorizations.”(Rev. Math. Phys. 10(1), pp. 81-145, 1998)に見られるので、まずは彼らの研究を追うことから始める。

3) Wiener 空間上には Wiener-伊藤分解に整合する Heisenberg 代数の作用がある。この作用を用いて確率解析における様々なことを記述する。

４．研究成果

1) Loewner-Kufarev 方程式のパラメータ付けの一つとして、無限個の道でパラメトライズされた制御型 Loewner-Kufarev 方程式とよぶクラスを導入した。このとき制御型 Loewner-Kufarev 方程式に沿って、解の Grunsky 係数が線形微分方程式に従うことを示し、

それをパラメータである無限個の道の重複積分を用いて陽的に書き下すことに成功した。さらにこの表示から、パラメータである道の作用と Witt 代数の作用を組み合わせることで、Grunsky 係数の陽的表示を、無限個の道に付随する signature の Witt 作用へとエンコードすることができた。また、埋め込んだ Segal-Wilson Grassmannian における Loewner-Kufarev 方程式の解の連続性を記述することができる、無限個の道のクラスを一つ見つけることができた(Roland Friedrich 氏との共同研究)。

2) B. S. Tsirelson と A. M. Vershik の研究におけるフレームワークは、畳み込みニューラルネットワークの構造に非常に似ていることに気付いた。この意味で確率空間の連続分解の彼らによる構成を参考にして、機械学習における「無限の過去からの学習」に対する一つのモデルを記述するというアイデアを手に入れることができた。現在研究中である。確率微分方程式が強解を持つ場合にも、二つの確率微分方程式の間の双対関係を記述するような確率空間の変換を考えることができる。この双対確率流を取る変換は J. Akahori and S. Watanabe.``On the strong solutions of stochastic differential equations.”(in Japanese, Social System Studies 4, pp.1-12, 2002)で導入されている。確率微分方程式を時間に関して Euler-丸山近似などで時間に関して離散化して、その時間分割幅を限りなく零に近づけたとき、片方の確率微分方程式の解への収束が、どのように双対関係にある確率微分方程式の解への収束を導くのか、弱収束と強収束の両方の意味で調べることができた(結城郷氏、田口大氏との共同研究)。

3) Brown 運動の関数を Clark-Ocone 公式を時間に関して離散化した式を用いて近似した Wiener 汎関数が、時間分割を限りなく小さくしていくときに、元の Brown 運動の関数への強収束の意味での収束レートを得ることができた(赤堀次郎氏・大熊香織氏との共同研究)。特に、この関数の Malliavin 解析の意味での滑らかさ s が 1 以下である場合に、収束レートは s/2 によって与えられる。この証明には巧妙に駆使された Heisenberg 代数の作用が関係している。さらに、Wiener 空間だけでなく Poisson 空間の上にも同様の Heisenberg 代数の作用があることを用いて、同様のことが Poisson 過程に対しても成り立つ。これを一般化して、やはり同様のことが飛躍型の Lévy 過程に対しても成り立つことを示すことができた(Nien-Lin Liu 氏, Azmi Makhlouf 氏, Takwa Saidaoui 氏との共同研究)。Wiener 空間において、この Heisenberg 代数の消滅作用素は Malliavin 微分として現れるが、よく知られた Malliavin 解析を駆使して、超関数に対する伊藤の公式を導出し、確率微分方程式から得られる拡散過程のの(超)関数を時間に関して積分した(一般化)Wiener 汎関数は、その被積分(一般化)Wiener 汎関数よりも、滑らかさが少なくとも 1 上がるという結果を得ることができた(琉佳勳氏との共同研究)。さらに拡散過程ではなく滑らかさが Gauss 過程の場合には、滑らかさが少なくとも 1/2 上がるという結果を得ることができた(Marie Kratz 氏との共同研究)。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 3 件）

1) Jirô Akahori, Takafumi Amaba and Kaori Okuma, A Discrete-Time Clark-Ocone Formula and its Application to an Error Analysis, Journal of Theoretical Probability, doi:10.1007/s10959-016-0666-8, pp 1-29, 2016.

2) Takafumi Amaba and Kazumasa Kuwada, A coupling of Brownian motions in the $\mathcal{L}_{0}$-geometry, Tohoku Math. J. (2) 70(1), pp.139-174, 2018.

3) Takafumi Amaba and Yoshihiro Ryu, Distributional Itô’s Formula and Regularization of Generalized Wiener Functionals, ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 15, pp.703-753 , 2018.

〔学会発表〕（計 13 件）

1) Takafumi Amaba and Kratz Marie, *On the regularity of time occupation functionals for Gaussian processes*, Mathematical Finance seminar, Ritsumeikan university, 14 February 2019.

2) Takafumi Amaba, *On dynamics of some equations related to stochastic objects*, 岡山-広島 解析・確率論セミナー 2018, 2018 年 3 月.

3) Takafumi Amaba and Roland Friedrich, *Loewner-Kufarev 方程式の連続率について*, 測地線及び関連する諸問題, 熊本大学, 2018 年 1 月.

4) Takafumi Amaba and Roland Friedrich, *Loewner-Kufarev 方程式の連続率について*, 確率論シンポジウム, 東北大学, 2017 年 12 月.

5) Takafumi Amaba and Roland Friedrich, *Loewner-Kufarev 方程式の連続率について*, 九州確率論セミナー, 九州大学, 2017 年 11 月.

6) Takafumi Amaba and Roland Friedrich, *Loewner-Kufarev 方程式の連続率について*, 福岡大学微分幾何研究集会, 福岡大学セミナーハウス, 2017 年 11 月.

7) Takafumi Amaba and Yoshihiro Ryu, *Distributional Itô's formula and regularization of generalized Wiener functionals*, 確率解析シンポジウム, 立命館大学, 2017 年 10 月.

8) Takafumi Amaba and Kazuhiro Yoshikawa, *An integration by parts on "space of loops"*, Probability Seminar, Universite du Luxembourg, 19 January 2017.

9) Takafumi Amaba and Kazuhiro Yoshikawa, *An integration by parts on "space of loops"*, Oberseminar zur Freien Wahrscheinlichkeitstheorie, Universität des Saarlandes, 13 December 2016.

10) Takafumi Amaba and Yoshihiro Ryu, *Hölder continuity of a diffusion local time*, 確率論ヤングサマーセミナー, 三重県伊勢市, 2016 年 8 月.

11) Takafumi Amaba, *Regularization of Generalized Wiener Functionals by Bochner Integral*, 確率解析シンポジウム, 大阪大学, 2015 年 10 月.

12) Takafumi Amaba, Dai Taguchi and Gô Yûki, *Convergence implications via dual flow method*, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 京都産業大学, 2015 年 9 月.

13) Takafumi Amaba, Dai Taguchi and Gô Yûki, *Convergence implications via dual flow method*, Stochastic Analysis and Applications, Tohoku University, Sendai, 2015, August.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
○出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年:
国内外の別:

○取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。