2版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 6 月　 5 日現在

機関番号： １２５０１

研究種目： 若手研究(B)

研究期間： 2015～2018

課題番号： １５Ｋ１７５６８

研究課題名（和文）ハミルトン構造に基づく非線形分散型方程式の解の時間大域挙動の研究

研究課題名（英文）Study of long time behavior of nonlinear dispersive equations via Hamiltonian structure

研究代表者

前田　昌也（Masaya, Maeda）

千葉大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：４０６１５００１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：非線形シュレディンガー方程式をはじめとする非線形分散型方程式のソリトン解を中心とする解の時間大域挙動についてそのハミルトン構造に着目して研究を行った。この研究の成果として小さな解のソリトン分解（つまり解が一つのソリトンと散乱波に分解されること）や非線形フェルミ黄金律によるボルテックス解の不安メカニズムが解明された。

研究成果の学術的意義や社会的意義
ソリトン分解予想は非線形分散型方程式論における重要な予想であるがその解決は未だ程遠い。本研究課題ではいくつかの特別な状況における非線形分散型方程式の解の大域挙動を解明することによりソリトン分解予想に対して一定の貢献を行った。また、光ファイバー等の研究に登場するボルテックス解の不安定性の解明は工学的にも重要であると思われる。

研究成果の概要（英文）：I have studied the long time behavior of solutions of nonlinear dispersive equations such as nonlinear Schrodinger equations. In particular, I studied soliton solutions and proved the soliton decomposition for small solutions and revealed the instability mechanism induced by nonlinear Fermi Golden rule for vortex solutions.

研究分野： 非線形偏微分方程式

キーワード： 非線形分散型方程式　ソリトン　漸近安定性

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．　研究開始当初の背景

非線形シュレディンガー方程式をはじめとする非線形分散型方程式は分散性を持つ線形部分と解を集約させる効果をもつ非線形部分の兼ね合いにより解の挙動が定まる。とりわけ特徴的なのはソリトンと呼ばれる解であり、これは線形部分の分散効果と非線形部分の集約効果がちょうど釣り合った解である。非線形分散型方程式における重要な予想（指針）にソリトン分解予想があり、非線形分散型方程式の時間大域解は有限個の異なる速度を持つソリトンと分散波に分解されるであろうと主張している。この意味においてもソリトンは非線形分散型方程式の重要な解である。また、ソリトン分解予想は非線形分散型方程式の時間大域挙動は比較的単純である（カオスなどが起こらない）としているが中間的な時間において複雑な挙動を示さないとは主張していないことに注意されたい。

ソリトン分解予想自身は現在の技術ではまだ解決に程遠い状況であるため、第一歩目として考えられるのがソリトンや自明解などの特殊解の近傍の解の大域挙動の研究である。この方面の研究としては Soffer-Weinstein による先駆的なものがあったが方法は複雑であり､限定された状況でのみ応用できる方法であった。

２．　研究の目的

上で述べた研究開始当初の背景より、局所的なソリトン分解予想の解決が研究の目的である。より具体的には自明解ならびにソリトン解の近傍の解の時間大域挙動を調べることが目的となる。一般的に特殊解の近くの解の挙動は線形化を通して調べるが、Soffer-Weinstein の研究により、準周期解が存在する線形化方程式と実際の非線形方程式では解の挙動が異なることが予想されている。このことは準周期解が存在しないとしているソリトン分解予想からも予想される。ゆえに、解の挙動の解析には非常に弱い非線形効果（非線形フェルミ黄金律）をコントロールする必要があり、技術的にはこの相互作用の解明が研究の目的であった。

３．　研究の方法

非線形シュレディンガー方程式をはじめとする非線形分散型方程式の多くはハミルトン（偏微分）方程式となっている。ハミルトン（常微分）方程式では正準座標を用いて解析を行うのが常道であるが、偏微分方程式のばあいでは正準座標はあまり用いられない。これは相空間が無限次元となるためである。しかしながら、特殊解の近傍における解析では解を特殊解を表す有限次元部分と分散解を表す無限次元部分に分解し常微分方程式と偏微分方程式のシステムとすることが多いため、正準座標を導入することは意味がある。本研究課題では正準座標の導入や正準変換によるエネルギー汎関数の変形に対する理論を整備することにより非線形フェルミ黄金律の解明を目指した。つまり、研究の方法としては解析力学的な手法と非線形分散型方程式特有の解析の融合を用いた。

４．　研究成果

(1)小さな解に対するソリトン分解予想の解決（５．主な発表論文 6,7, Scipio Cuccagna 氏、Touc V. Phan 氏との共同研究)。

代表的な非線形分散型方程式である非線形シュレディンガー方程式ならびに非線形クラインゴルドン方程式の自明解の近傍の解（つまり小さな解）の時間大域挙動を研究した。特に線形ポテンシャルが複数個の固有値をもち、分岐により複数の小さなソリトンがある場合を考えた。この場合、単純に線形化方程式を考えると準周期解が存在する。しかし、正準座標の導入や正準変換（バーコフ標準形理論）により非線形フェルミ黄金律をコントロールすることができ、特に二つ以上のソリトンは共存しえないことを示すことができる。このことにより小さな解は一つのソリトン解と分散波に分解されることが示された。

(2) 離散非線形シュレディンガー方程式における準周期解（５．主な発表論文 4)。

非線形シュレディンガー方程式の空間離散化である離散非線形シュレディンガー方程式の小さな解について研究した。離散非線形シュレディンガー方程式も（偏微分方程式ではないが）非線形分散型方程式の一種でありソリトン分解予想が成立するのではないかと考えていた。しかしながら､（１）の研究で決定的であった非線形フェルミ黄金律が成立しないことが研究により徐々に明らかになり、さらに特定の状況においては準周期解が構成できることがわかった。この準周期解を用いることにより離散非線形シュレディンガー方程式の小さな解は準周期解と分散解に分解されることがわかった。ここで得られた準周期解は高々二つのモードをもつもので一般に３つ以上のモードをもつ準周期解は存在しないであろうと予想しているが、このことはこの先の研究課題となる。つまり、離散非線形シュレディンガー方程式においてはソリトン分

解予想は成立しないが、ソリトンを高々2 つのモードをもつ準周期解に修正したような主張は成立するのではないかと考えている。

(3) 高速移動するソリトンと小さなソリトンの相互作用（５．主な発表論文 8, Scipio Cuccagna 氏との共同研究）。
(1),(2)はともに小さな解のみを扱っていたが、ここでは高速移動する大きなソリトンが線形ポテンシャルから分岐する小さなソリトンに衝突する場合を考える。高速移動するという仮定はソリトン間の相互作用を弱くするための技術的なものであるが、ここでのチャレンジは大きなソリトンと小さなソリトン両方に関して同時に正準座標を導入することができるか？というものである。結果的にはこれは可能であり、大きなソリトンの近傍の解は大きなソリトン＋小さなソリトン＋分散波に分解されることを示すことができた。

(4) Vortex 解の不安定性（５．主な発表論文 5，Scipio Cuccagna 氏との共同研究）。
2 次元における非線形シュレディンガー方程式は Vortex と呼ばれるソリトンの一種をもつ。Vortex は基底状態ではないので不安定であると考えられるが、線形不安定でない Vortex の存在が数値計算等により報告されていた。このような Vortex が非線形の意味で安定であるか不安定であるかは知られていなかったが、（１）などの得られた非線形フェルミ黄金律のメカニズムが実は Vortex においては逆に働き、Vortex を不安定化させることがわかった。非線形フェルミ黄金律は安定性において非常に弱く働くのと同様に不安定性においても非常に弱くしか働かず、それゆえ線形安定な Vortex は数値計算等でも一見安定であるかのように見えていた。しかし、5.の結果では Vortex の近傍でのソリトン分解予想の仮定の下で Vortex の不安定性ならびに、いくつかの技術的なかていのもとでの Vortex の近傍でのソリトン分解予想を示した。この結果は物理においても安定・不安定がわかっていなかった Vortex の不安定性を厳密に示せたため応用上も重要であると考えている。

(5)量子ウォークの分散理論（５．主な発表論文 1,3，佐々木浩宣氏、瀬川悦生氏、鈴木章斗氏、鈴木香奈子氏との共同研究）。
離散非線形シュレディンガー方程式が非線形シュレディンガー方程式を空間方向に離散化したものであるとすれば、量子ウォークは分散型方程式であるディラック方程式を時空間について離散化したものであるといえる。量子ウォークはモデルの提示当初からディラック方程式との関連が指摘されていたもののその名が示す通りランダムウォークの量子版と見なされ、その方向での研究が主であった。3.では非線形の量子ウォークに対して非線形分散型方程式の解析手法が用いることが示され、特に分散型評価、ストリッカーツ評価ならびに非線形の散乱と逆散乱の結果が得られた。また、1.では 3.の結果を応用することにより、量子ウォークでは重要である弱収束定理を証明することができた。量子ウォークに対するソリトン解の存在やそれに伴う非線形フェルミ黄金律に関してはこの先の研究課題となる。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計８件）

1. Masaya Maeda, Hironobu Sasaki, Etsuo Segawa, Akito Suzuki and Kanako Suzuki, “Weak limit theorem for a nonlinear quantum walk",Quantum Information Processing 査読有, 17 (9), 17:215 (2018).
   DOI: 10.1007/s11128-018-1981-z
2. Scipio Cuccagna, Masaya Maeda, “On nonlinear profile decompositions and scattering for a NLS-ODE model", to appear in IMRN 査読有.
   DOI: https://doi.org/10.1093/imrn/rny173
3. Masaya Maeda, Hironobu Sasaki, Etsuo Segawa, Akito Suzuki, Kanako Suzuki. “Scattering and inverse scattering for nonlinear quantum walks", Discrete and Continuous Dynamical Systems – A 査読有, 38 (7), 3687-3703 (2018).
   DOI: 10.3934/dcds.2018159
4. Masaya Maeda, “Existence and asymptotic stability of quasi-periodic solution of discrete NLS with potential in Z", SIAM J. Math. Anal. 査読有 49 no. 5, 3396-3426 (2017).
   https://doi.org/10.1137/16M1069729
5. Scipio Cuccagna, Masaya Maeda, “On orbital instability of spectrally stable vortices of the NLS in the plane", Journal of Nonlinear Science 査読有 26, no. 6, 1851-1894 (2016).
   https://doi.org/10.1007/s00332-016-9322-9
6. Scipio Cuccagna, Masaya Maeda, Tuoc V. Phan, “On small energy stabilization in the NLKG with a trapping potential", Nonlinear Analysis 査読有 146, 32-58 (2016).
   https://doi.org/10.1016/j.na.2016.08.009

7. Scipio Cuccagna, <u>Masaya Maeda</u>, “On small energy stabilization in the NLS with a trapping potential", Analysis and PDE **査読有**, 8, no. 6, 1289-1349 (2015).
   DOI: 10.2140/apde.2015.8.1289
8. Scipio Cuccagna, <u>Masaya Maeda</u>, “On weak interaction between a ground state and trapping potential", Discrete and Continuous Dynamical Systems Series A **査読有**, 35, no. 8, 3343-3376 (2015).
   doi: 10.3934/dcds.2015.35.3343

〔学会発表〕（計１０件）

1. **<u>前田昌也</u>**, “ Long time oscillation of solutions of nonlinear Schrodinger equations near minimal mass ground state ”, **第 5 回量子渦と非線形波動**, 2018 **年** 12 **月** 5 **日**, **東京理科大学（東京）**.
2. **<u>前田昌也</u>**, “On Scattering for NLS-ODE model having metastable solution” , The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2018 **年** 7 **月** 6 **日**, **台湾国立大学（台湾台北市）**._
3. **<u>前田昌也</u>**, “Oscillation of soliton around critical frequency” , **数理解析研究所共同研究「非線形波動及び分散型方程式の研究」**, 2018 **年** 5 **月** 23 **日**, **京都大学（京都市）**.
4. **<u>前田昌也</u>**, “**量子ウォークの分散評価**”, RIMS **関数不等式の最良定数とその周辺**, 2017 **年** 9 **月** 21 **日**, **京都大学(京都市)**.
5. **<u>前田昌也</u>**, “On long time dynamics of small solutions of nonlinear dispersive equations with potential”, Participating school in analysis of PDE Stability of solitons and periodic waves, 2017 **年** 8 **月** 24 **日**、KAIST (**韓国大田市**).
6. **<u>前田昌也</u>**, “On orbital instability of excited states of nonlinear Schrodinger equations”, **日本数学会秋季分科会**, 2016 **年** 9 **月** 18 **日**, **関西大学（大阪府吹田市）**.
7. **<u>前田昌也</u>**, “On Long Time Dynamics of Small Solutions of Discrete Nonlinear Schrodinger Equations”, SIAM Conference on Nonlinear Waves and Coherent Structures, 2016 **年** 8 **月** 8 **日**, Sheraton Philadelphia (**米国フィラデルフィア市**).
8. **<u>前田昌也</u>**, “On small solutions of nonlinear Schrodinger equations with potential”, Workshop on Harmonic Analysis and PDE, 2016 **年** 1 **月** 10 **日**, **華中師範大学(中華人民共和国武漢市)**.
9. **<u>前田昌也</u>**, “On small solutions of continuous and discrete nonlinear Schr¨odinger equation”, The 8th international conference on Science and Mathematics Education in Developing Countries, 2015 **年** 12 **月** 4 **日**, **ヤンゴン大学（ミャンマー連邦共和国ヤンゴン市）**.
10. **<u>前田昌也</u>**, “On long time behavior of small data solutions of NLS with potential”, **調和解析と非線形偏微分方程式**, 2015 **年** 7 **月** 8 **日**, **京都大学(京都市)**.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等
なし

６．研究組織

(1)研究分担者
なし

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。