

令和元年5月21日現在

機関番号：24403

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17569

研究課題名(和文) 双安定反応拡散方程式に対する定常解構造と界面運動の解析

研究課題名(英文) Structure of stationary solutions and motion of interfaces in bistable reaction-diffusion equations

研究代表者

菅 徹 (Kan, Toru)

大阪府立大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：60647270

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：反応拡散方程式を対象として定常解構造と解の界面運動に関する研究を行った。まず、ダンベル型の多次元領域が1次元区間に近づく領域の特異極限を考え、極限で現れる区間上の極限方程式を導出した。そして極限方程式に対する定常解の分岐解析を基に、ダンベル型領域上の方程式の定常解構造を明らかにした。また、移流項を含む方程式に対して定常解の一意性が成立する条件を与えた。さらに、2次元平面上の双安定反応拡散方程式を考察し、界面の形状は局所的に直線に近づくが界面の位置は平面進行波解から見て進行方向に遠ざかる解を求めた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

反応拡散方程式に対する非定数定常解の存在と安定性の研究は、パターン形成に関する数学的研究として最も関心の高い研究の一つである。しかし、定常解構造を決定することは、特に領域の形状が複雑な場合には非常に困難な問題となる。本研究では新しいタイプの領域の特異極限を考え、詳細な解析が可能な方程式へ問題を帰着させることでこれを克服した。この方法を用いることで、さらに複雑な領域において解構造の解析が可能となると期待される。

研究成果の概要(英文)：For reaction-diffusion equations, structure of stationary solutions and motion of interfaces of solutions were studied. I considered a dumbbell-shaped domain which converges to a one-dimensional interval and derived the limiting equation on the interval. Based on the analysis of stationary solutions of the limiting equation, I found stationary solutions of the equation on the dumbbell-shaped domain. In addition, for equations with drift terms, conditions on the uniqueness of stationary solutions were obtained. Furthermore, I considered bistable reaction-diffusion equations on the plane and found a solution such that its interface locally approaches a line while the position of the interface gets away from that of a planar travelling wave solution in the direction of travel.

研究分野：数物系科学

キーワード：双安定反応拡散方程式 領域の特異極限 定常問題 分岐解析 安定性解析

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

(1) ノイマン境界条件下における単独の反応拡散方程式は、凸領域においては安定な非定数定常解を持たないが、領域がダンベル型で反応項が双安定型るとき安定な非定数定常解を持ち得る。このような定常解を含む解構造を詳細に調べるため、ダンベル型領域のチャンネルの幅をゼロに近づける領域の特異極限の研究が盛んに行われた。この極限の考察で、領域のチャンネルを除く各領域でほぼ定数となる解については詳しい解析が可能となった。しかし、この特異極限で得られる極限方程式の解析の困難さから、それ以外の解の構造については理解が不十分なままであった。

(2) 双安定反応拡散方程式の解は界面(2つの安定な定数解を遷移する部分)を形成し、その動きを追跡することによって、解の形状と挙動が理解できる。既存の研究により、1次元区間において密集した界面を持つ定常解、多次元空間において平面的でない界面を持つ進行波解などが発見され、複雑な界面運動の様相が明らかになりつつあった。

### 2. 研究の目的

(1) 反応拡散方程式において見られる複雑な定常解構造の一端を明らかにすることが本研究の1つ目の目的である。定常解構造は領域の形状と反応項に強く依存する。領域がダンベル型で反応項が双安定型の場合には、安定な非定数定常解が存在し得るため、定常解構造は複雑になる。この複雑な構造が現れるメカニズムを、反応率を分岐パラメータとした分岐解析を通じて理解する。一方、反応項などの条件によっては定常解構造が比較的単純になる場合もある。特に定常解が一意的となるための条件を考察する。

(2) 双安定反応拡散方程式に対し、界面運動の解析を通じて解の多様なダイナミクスを観察することが本研究の2つ目の目的である。特に2次元平面上の解の界面の漸近的振る舞いに焦点をあてる。球対称解の界面が広がっていく状況を考えて、界面の近くで解は平面進行波解に漸近するが、拡散の影響により、界面の位置は平面進行波解から見て進行方向逆向きに離れていく。このような局所的に平面進行波解に近づく解の界面の位置について考察する。

### 3. 研究の方法

(1) ダンベル型領域は形状が複雑であるため、その領域上で定常解構造を決定することは技術的困難を伴う。そこで、ダンベルの形を保持したまま1次元区間に収束する領域の特異極限を考察する(右図参照)。これにより1次元区間上の極限方程式へと問題を帰着させる。接合漸近展開の方法によって、この特異極限における解の形式的な漸近展開を導き、主要項が満たすべき方程式として極限方程式を求める。その後、この漸近展開を数学的に正当化するために、ダンベル型領域上の方程式の線形部分と極限方程式の線形部分のレゾルベントの差の評価を行う。極限方程式の定常解構造の解析には shooting 法を用いる。定常解の一意的性に関する研究では、適切なエネルギー形式を導入することで解の一意評価および2つの解の差の評価を導く。

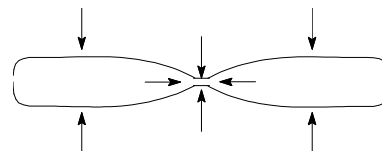


図 ダンベル型領域の特異極限

(2) 界面運動の解析のために比較原理を用いる。平面進行波解を基にして優解と劣解を構成し、真の解を得ると同時にその解の上下からの評価を導く。

### 4. 研究成果

(1) 1次元区間に収束するダンベル型領域の特異極限を考え、解の形式的な漸近展開によって極限方程式を導出した。この特異極限で領域は全体として1次元区間に収束するが、チャンネルの部分は他の部分よりも速く1点に収束する(上図参照)。この1点に収束する速さを適切に与えることで、極限方程式の解がその点で満たすべき接合条件が現れることが分かった。形式的な計算により得られたこの極限方程式が、実際に次の意味でダンベル型領域上の方程式を近似していることを示した。

極限方程式が非退化な定常解を持つとき、その近傍にダンベル型領域上の方程式の非退化な定常解が存在し、それらのモース指数は等しい。

それらの定常解が漸近安定であるとき、ダンベル型領域上の方程式の定常解の吸引領域を、対応する極限方程式の定常解の吸引領域を用いて近似的に求めることができる。

また、反応率を分岐パラメータとして極限方程式の定常問題の分岐解析を行い、双安定型反応項に対する適当な仮定の下、次のことを示した。

不安定な定常解上に可算無限個分岐点が存在し、各分岐点から非定数解の枝が分岐する。

それらは反応率が大きくなる方向に大域的にのびる。

それらの解の枝のうち、偶数番目の枝には2次分岐点が存在しないが、奇数番目の枝には2次分岐点がただ1つ存在する。

さらに、移流項を含むような方程式に対して、定常解が一意的となるような条件を与えた。リアプノフ関数が存在する場合に知られていた結果を、それを摂動した方程式に対して拡張した。

(2) 2次元平面上の双安定反応拡散方程式を考察し、平面進行波解に局所的に漸近するが、界面の位置は平面進行波解から見て進行方向に時刻のべき乗のオーダーで遠ざかる解が存在することを示した。初期関数の界面の空間遠方における挙動を適切に選ぶことによってこのような解が構成できる。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計2件)

Toru Kan, Masahiro Suzuki, Uniform estimates and uniqueness of stationary solutions to the drift-diffusion model for semiconductors, *Applicable Analysis*, 査読有, 2018, doi:10.1080/00036811.2018.1460820.

Toru Kan, On an ODE related to the stationary problem of a reaction-diffusion equation on a thin domain, *数理解析研究所講究録*, 査読無, No.2080, 2018, 43-52.

〔学会発表〕(計19件)

Toru Kan, 細いダンベル型領域上の双安定反応拡散方程式の解構造, 反応拡散方程式と非線形分散型方程式の解の挙動, 京都大学数理解析研究所, 2019年.

Toru Kan, Bistable reaction-diffusion equations on some thin tubular domain, 2018 China-Japan Workshop on Nonlinear Diffusion Problems, Shanghai (China), 2018年.

Toru Kan, 局所的に平面進行波に漸近する Allen-Cahn 方程式の解について, 「語ろう」数理解析, 芝浦工業大学, 2018年.

Toru Kan, Reaction-diffusion equations on a singularly perturbed domain, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Taipei (Taiwan), 2018年.

Toru Kan, A remark on the stability of planar traveling waves in scalar bistable reaction-diffusion equations, UK-Japan Workshop on Analysis of Nonlinear Partial Differential Equations, Swansea (Wales), 2018年.

Toru Kan, 半導体の移流拡散モデルに対する定常解の一意性, 南大阪応用数学セミナー, 大阪府立大学, 2018年.

Toru Kan, Stationary solutions of bistable reaction-diffusion equations on some thin tubular domain, Seminar on Qualitative Theory of Differential Equations, Bratislava (Slovakia), 2018年.

Toru Kan, Stationary solutions of bistable reaction-diffusion equations on some thin tubular domain, 神楽坂解析セミナー, 東京理科大学, 2017年.

Toru Kan, On an ODE related to the stationary problem of a reaction-diffusion equation on a thin domain, Succession and Innovation of Studies on ODEs in Real Domains, 京都大学数理解析研究所, 2017年.

Toru Kan, On the solution structure of bistable reaction-diffusion equations on a thin tubular domain, 京都駅前セミナー, キャンパスプラザ京都, 2017年.

11 Toru Kan, On the solution structure of bistable reaction-diffusion equations on some thin tubular domain, Equadiff 2017, Bratislava (Slovakia), 2017年.

12 Toru Kan, On the solution structure of bistable reaction-diffusion equations on a thin dumbbell-shaped domain, International Workshop on Nonlinear Analysis and Reaction-Diffusion Equations, Zhenjiang (China), 2017年.

13 Toru Kan, Bifurcation in scalar bistable reaction-diffusion equations on a thin dumbbell-shaped domain, 偏微分方程式セミナー, 北海道大学, 2017年.

14 Toru Kan , On the solution structure of bistable reaction-diffusion equations on a thin dumbbell-shaped domain , 5th Italian-Japanese Workshop on Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's , 大阪市立大学 , 2017 年 .

15 Toru Kan , On the solution structure of a bistable reaction-diffusion equation on a thin dumbbell-shaped domain , 2017 International Workshop on Nonlinear PDE and Applications , Daejeon (Korea) , 2017 年 .

16 Toru Kan , Bifurcation analysis for stationary solutions of bistable reaction diffusion equations , The 18th Northeastern Symposium on Mathematical Analysis , 東北大学 , 2017 年 .

17 Toru Kan , Bifurcation analysis for some one-dimensional bistable reaction diffusion equation , 微分方程式の総合的研究 , 京都大学 , 2016 年 .

18 Toru Kan , 単独双安定反応拡散方程式の定常問題に対する分岐解析 , 第 7 回拡散と移流の数理 , 秋田大学 , 2016 年 .

19 Toru Kan , 単独反応拡散方程式の安定定常解に関する考察 , Okayama Workshop on Partial Differential Equations , 岡山大学 , 2016 年 .