

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 5 月 8 日現在

機関番号：15401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K17574

研究課題名(和文) 退化粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の力学的構造

研究課題名(英文) Dynamical structure on degenerate Hamilton-Jacobi equations

研究代表者

三竹 大寿 (Mitake, Hiroyoshi)

広島大学・工学研究科・准教授

研究者番号：90631979

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：弱Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) 理論を偏微分方程式の立場から見直すことで、Hamilton-Jacobi (HJ) 方程式のディスカウント近似に関する漸近問題を、退化粘性HJ方程式に対して、ハミルトニアンが凸型の場合に解決した。更に、同問題において、非凸型方程式や、収束率の解析において端緒となる成果を与えた。また、弱KAM理論の文脈で弱結合型の連立方程式系の加法的固有値問題の解公式を与えた。結晶成長を動機として生成伝播型微分方程式を導出し、成長速度に関する研究を始めた。結果として、既存の放物型方程式には現れない漸近的成長速度に関する結果を得ることに成功した。

研究成果の概要(英文)：The main purpose of this project is to develop a qualitative analysis of degenerate Hamilton-Jacobi (HJ) equations and weakly coupled systems in the spirit of weak KAM theory. More precisely, I focused on a selection problem in the vanishing discount process for degenerate HJ equations with convex Hamiltonians and proved the convergence of approximated solutions by using the nonlinear adjoint method. Also, I started to work on nonconvex HJ equations and rate of convergence on the vanishing discount problem, and gave partial answers. Moreover, I gave a mathematical formulation for the birth and spread model in the crystal growth, which is described by the forced mean curvature equations with source, and investigated asymptotic speed of solutions.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：粘性解理論 弱KAM理論 退化粘性ハミルトン・ヤコビ方程式 生成伝播型微分方程式 非線形随伴法  
ディスカウント近似

### 1. 研究開始当初の背景

偏微分方程式論における粘性解理論は、Hamilton-Jacobi (HJ) 方程式を偏微分方程式の立場から解析する道具として、国際的にも標準的なものとして受け入れられてきた。この粘性解理論は、広いクラスの非線形微分方程式に対して解の適切性（存在，一意性）が成り立つ点で優れているが，その解の詳細な性質を調べることは極めて難しい。この点を，背景にあるハミルトン系の観点から見直した取り組みが 2000 年頃から行われてきた。ハミルトン系における重要な理論として，可積分系を摂動した系に対しても，規則的な解の存在を保証する Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) 理論が挙げられる。KAM 理論の発展としての Aubry-Mather 理論は，変分的手法により一般化された不変集合を導入した。この Aubry-Mather 理論と粘性解理論を結びつけることで，相互の理論がより明瞭なものとなった。この理論は，KAM 理論を背景に，粘性解という弱解を利用した理論ということで，Albert Fathi 氏により弱 KAM 理論と提唱された。この弱 KAM 理論の中で，定常 HJ 方程式の（粘性）解構造の理解は飛躍的に進み，その応用として HJ 方程式の漸近解析が進んできた。

一方で，最適確率制御問題を考えると自然に現れる退化粘性 HJ 方程式（通常の HJ 方程式に退化しうる線形拡散項を加えた方程式）や弱結合型連立系は，粘性解理論においてより自然な枠組みとして考えることができるが，従来の弱 KAM 理論では，決定論的な力学系しか扱えないため，取り扱いが困難であった。この点に注目して，研究活動スタート支援（2012, 2013 年度）「完全非線形偏微分方程式系の漸近問題に関する解析」において，弱 KAM 理論を拡張することを始めた。この研究の中で，自然に現れる漸近問題が多く未解決であった。また，結晶成長に見られる現象を記述する方程式への応用が期待されていた。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は，背景で述べた退化粘性 HJ 方程式，弱結合型連立方程式系の粘性解の定性的性質について研究することである。具体的には，以下の三つのテーマについて進展させることを目的とする。

テーマ 1. 定常退化粘性凸型及び非凸型 HJ 方程式の周期粘性解の選択問題に関する解析，

テーマ 2. 弱結合型 HJ 連立方程式に対する弱 KAM 理論を構築，

テーマ 3. 結晶成長への応用（結晶成長の漸近的速さの解析）

### 3. 研究の方法

テーマ 1 では，従来の粘性解理論，弱 KAM 理論における方法論では，解析が難しいこと

が分かっていたため，これらの理論の中に，如何に新しい解析手段を導入するかが問題であった。そこで，2010 年に L. C. Evans 氏が導入した非線形随伴法に注目をした。この手法をディスカウント近似に如何に適用させるかを考える必要があった。この手法に精通する，Hung V. Tran 氏（ウィスコンシン大学マディソン校）と研究協力をして取り組んだ。同大学への訪問，同氏の招聘をすることで研究の促進に努めた。更に，非凸型 HJ 方程式や 2 階完全非線形型方程式を解析するために，Diogo A. Gomes 氏（アブデュラ王立工科大学），石井仁司氏（早稲田大学）に研究協力を求めた。また，収束率を解析するためには，力学系の知識が必要となったため，曾我幸平氏（慶應大学）に研究協力を求めた。

テーマ 2 では，ハミルトン・ヤコビ方程式の弱結合連立方程式系について，最適制御の観点から解の公式を与える。特に，ジャンプ型制御を考慮した弱 KAM 理論の構築をする必要がある。この問題について精通した，Antonio Siconolfi 氏（ローマ大学），山田直記氏（福岡大学）と共同で取り組んだ。そのため，上記した大学への訪問や，招聘を求めた。

テーマ 3 では，結晶成長学においてより重要とされる問題を発見するために，儀我美一氏（東京大学）に研究協力を求めた。

### 4. 研究成果

テーマ 1. 定常 HJ 方程式の加法的固有値問題は，HJ 方程式の漸近問題（均質化問題，初期値問題の長時間挙動）に多くの応用を持つ。また，歴史的には，解析力学における可積分性の判定法にも現れる重要な問題である。この問題の粘性解の範疇での可解性は，P.-L. Lions, G. Papanicolaou, S. R. S. Varadhan (1987 年) らによる有名な未発表論文で初めて証明された。その方法は，可解性の観点から自然な近似問題を考えて，その解の極限をとるというものである。この近似は，数理ファイナンスにおいて名前がつけられ，ディスカウント近似と呼ばれる。その極限である定常 HJ 方程式の加法的固有値問題の粘性解は，多重性があることが知られている。

そこで，近似問題の解は，全列で収束するか？収束する場合は，極限問題のどの粘性解に収束するか？といった疑問が自然に浮かぶ。このような問いを，加法的固有値問題に対する選択問題と呼ぶ。この問いは，上記した未発表論文や，たとえば，粘性解理論を学ぶのに標準的に利用される教科書 M. Bardi, I. Capuzzo-Dolcetta (1997 年) の 400 ページ，Remark 1.2 にも指摘されていて，比較的昔から専門家の間では重要な問題として認識されていた。

この問題に対して，次の重要な 4 つの成果  
 「(i) 収束することの証明と，収束先の特徴付け，(ii) 2 階凸型完全非線形型方程式への拡張，(iii) 非凸型 HJ 方程式への拡張，(iv)

収束率」を得ることに成功した。これらの結果は、業績の欄にあるように、それぞれ査読付きの国際雑誌に掲載された。まず、収束については、非線形随伴法を利用して、退化粘性HJ方程式に対する確率的Mather測度を定義し、その存在を利用することで同方程式のディスカウント近似問題の極限を特徴付けた。さらに、凸性を利用した双対性を利用し、2階凸型完全非線形型方程式のディスカウント近似現れる選択問題を完全に解決した。また、これらの解析において方程式の凸性は本質的な役割を果たすが、それを一部外すことに成功した。最後に、収束率に関する結果は、部分的な解決ではあるが、今後のこの方向での研究の試金石となることが期待できる。国際的にも盛んに研究されている分野であり、今後の更なる波及効果が期待できる。

テーマ2．弱結合型HJ連立方程式の加法的固有値問題について、その解の表現公式を与えた。背景にあるジャンプ型制御を考慮することが重要であった。この結果は、同連立方程式系の研究の端緒として、国際的に波及効果があり、フランスやイタリアで、その後の進展となるような研究がされている。

テーマ3．結晶の成長を巨視的に見たとき、生成伝播モデルで記述されることが、結晶成長学において1960年代頃から提唱されていた。しかし、数学的定式化、解析は与えられていなかった。このことを、Trotter-Kato型の近似を考えると、粘性解理論における安定性を利用することで定式化した。そのことで、幾何学方程式に外力項を加えた方程式が重要なクラスの方程式として導出された。このクラスに入る微分方程式を生成伝播型微分方程式と名付けた。同方程式の解の存在、一意性に関しては、既存の粘性解理論で整備されていたので、特に、解の漸近的成長速度について解析を始めた。その結果、従来の放物型方程式には現れない漸近的成長速度に関する結果を得ることに成功した。結晶成長における現象論的考察から、多くの研究課題が生まれているが数学的解析はまだ始まったばかりである。

#### 5．主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計11件)

1. H. Mitake, K. Soga, Weak KAM theory for discount Hamilton-Jacobi equations and its application, to appear in Calc. Var. Partial Differential Equations. 査読有, DOI: 10.1007/s00526-018-1359-1.
2. H. Mitake, H. V. Tran, On uniqueness sets of additive eigenvalue problems and applications, to appear in Proc. Amer. Math. Soc. 査読有, DOI: 10.1090/proc/14152.
3. D. A. Gomes, H. Mitake, H. V. Tran, The Selection problem for discounted Hamilton-Jacobi equations: some non-convex cases, J. Math. Soc. Japan 70 (2018), no. 1, 345-364. 査読有. DOI: 10.2969/jmsj/07017534.
4. H. Ishii, H. Mitake, H. V. Tran, The vanishing discount problem and viscosity Mather measures. Part 2: boundary value problems, J. Math. Pures Appl. (9) 108 (2017), no. 3, 261-305. 査読有, DOI: 10.1016/j.matpur.2016.11.002.
5. H. Ishii, H. Mitake, H. V. Tran, The vanishing discount problem and viscosity Mather measures. Part 1: the problem on a torus, J. Math. Pures Appl. (9) 108 (2017), no. 2, 125-149. 査読有, DOI: 10.1016/j.matpur.2016.10.013.
6. H. Mitake, H. V. Tran, Selection problems for a discount degenerate viscous Hamilton-Jacobi equation, Adv. Math. 306 (2017), 684-703. 査読有, DOI: 10.1016/j.aim.2016.10.032.
7. H. Mitake, H. V. Tran, Weakly coupled systems of the infinity Laplace equations, Trans. Amer. Math. Soc. 369 (2017), 1773-1795. 査読有, DOI: 10.1090/tran6694.
8. Y. Giga, H. Mitake, H. V. Tran, On asymptotic speed of solutions to level-set mean curvature flow equations with driving and source terms, SIAM J. Math. Anal. 48 (2016), 3515-3546. 査読有, DOI: 10.1137/15M1052755.
9. H. Mitake, A. Siconolfi, H. V. Tran, N. Yamada, A Lagrangian approach to weakly coupled Hamilton-Jacobi systems, SIAM J. Math. Anal. 48 (2016), no. 2, 821-846. 査読有, DOI: 10.1137/15M1010841.
10. D. Gomes, H. Mitake, Existence for stationary mean field games with quadratic Hamiltonians with congestion, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 22 (2015), no. 6, 1897-1910. 査読有, DOI: 10.1007/s00030-015-0349-7.
11. H. Mitake, H. V. Tran, Large-time behavior for obstacle problems for degenerate viscous Hamilton-Jacobi equations, Calc. Var. Partial Differential Equations. 54, (2015), no. 2, 2039-2058. 査読有, DOI: 10.1007/s00526-015-0855-9.

〔学会発表〕(計 28 件)

以下, 主要な学会発表を抜粋.

1. H. Mitake, Existence of asymptotic speed for level set equations with source term, 2017/10/19, 発展方程式の理論と非線形現象の数学解析, 京都大学数理解析研究所, 京都府.
2. H. Mitake, Stochastic Mather measure and its applications, 2017/8/8, Large scale properties of partial differential equations with random coefficients, RIMS 合宿型セミナー, 滋賀県.
3. H. Mitake, Weak KAM theory for discount Hamilton-Jacobi equations and its application, 2017/January/12, Beyond Hamilton-Jacobi, Last call to Bordeaux, University of Bordeaux, France.
4. H. Mitake, 弱KAM理論の測度論的定式化と非線形随伴法入門, 2016/6/8, 力学系とその関連分野の連携探索, 京都大学数理解析研究所, 京都府.
5. H. Mitake, On asymptotic speed of the crystal growth, 2016/March/7, Mathematics Colloquium in Univ. Madison-Wisconsin, U.S.A.
6. H. Mitake, Asymptotic speed of solutions to level-set mean curvature flow equations with driving and source terms, 2015/12/3, 微分方程式の漸近問題と粘性解, 京都大学数理解析研究所, 京都府.
7. H. Mitake, A generalization of discounted approximation and application to non-convex Hamilton-Jacobi equations, 2015/6/23, The Hamilton-Jacobi Equation: At the crossroads of PDE, dynamical systems and geometry, Cortona (Italy).

〔図書〕(計 1 件)

1. N. Q. Le, H. Mitake, H. V. Tran, Dynamical and Geometric Aspects of Hamilton-Jacobi and Linearized Monge-Ampere Equations, Springer, Lecture Notes in Mathematics 2183, ISBN: 3319542079.

6. 研究組織

(1)研究代表者

三竹 大寿 (MITAKE Hiroyoshi)  
広島大学大学院工学研究科・准教授

研究者番号 : 90631979

(2)研究分担者

なし ( )

(3)連携研究者

なし ( )

(4)研究協力者

儀我 美一 (GIGA Yoshikazu)  
Diogo A. GOMES  
石井 仁司 (ISHII Hitoshi)  
Antonio SICONOLFI  
曾我 幸平 (SOGA Kohei)  
Hung V. TRAN  
山田 直記 (YAMADA Naoki)