2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月 １１ 日現在

機関番号：３２６０７
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ１７５７６
研究課題名（和文）非線形双曲型偏微分方程式の解の特異性伝播に関する研究

研究課題名（英文）Reserch on the propagation of singularities of the solutions for nonlinear hyperbolic partial differential equations

研究代表者
伊藤　真吾（Ito, Shingo）

北里大学・一般教育部・教授

研究者番号：４０５４８１４５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,300,000円

研究成果の概要（和文）：波束変換を用いて波面集合の特徴づけを与えた。また，その特徴付けと，波束変換を用いた変数係数1階双曲型偏微分方程式の解の表示を組合せて，特異性伝播に関する定理の別証明を与えた。一方，ここで用いた方法を利用して，シュレディンガー方程式およびエアリー方程式を含む線形分散型偏微分方程式の解の波束変換による表示を導出し，モジュレーション空間上で，その解の評価を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
波面集合の特徴付けに関しては，今回得られた波束変換による波面集合およびソボレフ型波面集合の特徴付けの他にも，F.B.I変換を用いたGabor型波面集合およびSG-波面集合の特徴付け，波束変換によるフーリエ・ルベーグ型波面集合の特徴付け等が知られているが，それらを偏微分方程式へ応用した結果はあまり知られていない。今回得られた結果は波束変換による波面集合の特徴付けを特異性の伝播の問題へ応用したものであり，結果自体は既知の結果であるが、ここで用いた手法は未解決問題にも適用可能であると考えられ，今後の発展が期待される。

研究成果の概要（英文）：We obtained the characterization of the wavefront set by using the wave packet transform. Combining the characterization with the new representation of the solution to first-order hyperbolic partial differential equations with variable coefficients using wave packet transform, we given another proof of the theorem on propagation of singularities. On the other hand, by the method used above, we derive the new representation of the solution of linear dispersive partial differential equation including Schroedinger equation and Airy equation, and we obtained the some estimates of the solution on modulation space.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：波面集合　特異性伝播　波束変換

１．研究開始当初の背景

偏微分方程式の初期値問題を考察する場合，その解の特異性を決定することは重要な問題の一つである。特に双曲型の偏微分方程式においては，特異性の伝播に関する問題が有名である。これは，双曲型偏微分方程式の特徴の一つで，解の初期値に与えられた特異性が時間の経過とともに方程式固有の法則で伝わっていく現象のことである。関数の特異性を記述するためには L.Hörmander によって導入された方向別の特異性，いわゆる波面集合を用いることが多い。

一般に，線形波動方程式の解の波面集合は，方程式と初期値から決定される零陪特性曲線に沿って伝播し，それ以外の場所には現れないという Hörmander による古典的な結果が知られている。その後，J.M.Bony，M.Beals，M.Reed，J.Rauch らに代表される多くの数学者によって，非線形方程式における特異性伝播の問題が研究され，非線形方程式においては線型方程式の場合に特異性が現れる箇所以外にも新たな特異性が不規則に発生することが示された。その一方で，初期値に仮定する波面集合をソボレフ型（H^s 型）波面集合にすると，指数 s が十分小さい場合には，新たな特異性の発生が起こらずに線形の場合と同様の現象が起きることが示された。その後も，ソボレフ型波面集合の伝播に関する研究は多くの数学者によって研究されており，指数 s が十分大きいときは特異性の伝播が不規則に起きること，s が十分小さければ線型方程式の場合のように零陪特性曲線に沿った規則的な伝播が起きることが示されているが，その現象の境目となる指数 s の値は未だ解明されていない。この問題の足がかりとして，研究代表者は 1 次元波動方程式系の非線形項に零条件と呼ばれる特殊な条件を仮定することで，ソボレフ型波面集合が規則的に伝播するための指数 s の条件を弱め，既知の結果を改良することに成功しているが，多次元の波動方程式系の場合には複雑な点が多く，未解決の問題として残されている。

２．研究の目的

非線形双曲型偏微分方程式の解の特異性伝播のメカニズムを解明することが本研究の目的である。本研究で考える特異性は主にソボレフ型波面集合である。

（１） ソボレフ型波面集合の伝播に関して，非線形項に適当な条件を仮定することで，既知の結果を改良することを目指す。まずは，波動方程式の非線形項に零条件と呼ばれる特殊な条件を仮定した場合を考える。具体的には，零条件を満たす非線形項を持つ 1 次元半線形波動方程式系の特異性伝播に関する申請者のこれまでの結果を多次元に拡張させる。その後，一般の 2 階厳双曲型偏微分方程式についても，波動方程式における零条件に相当する適当な非線形項を決定し，同様の結果を導くことを目指す。

（２） 一般の非線形項を持つ半線形波動方程式において，ソボレフ型波面集合が規則的に伝播するために必要十分な指数 s の条件を明らかにする。

３．研究の方法

（１）本研究は，東京理科大学の加藤圭一教授，北海道大学の小林政晴准教授と共同で研究を行った。細かな点はメールでのやり取りによったが，必要に応じて直接会い議論することで共同研究を進めた。また，研究集会や学会時に研究連絡を行った。

（２）研究論文や研究集会への参加により、既存の研究手法および新たなアイディアの開拓に向けた情報収集を行った。

（３）具体的な数学の手法としては、波束変換を用いて波面集合を特徴づけ，それを利用して特異性伝播の問題の解析を行った。波束変換とは緩増加超関数 u と恒等的に 0 でない急減少関数φに対して，φ(y-x)の共役をとってから u(y)を掛け，それを y についてフーリエ変換したものとして定義される。一方，波面集合はある点の周りにサポートを持つカットオフ関数をかけてからフーリエ変換し，フーリエ像での増大度を調べることにより定義される。このことは波束変換したときのフーリエ像の増大度を調べることとほぼ同じであると考えられる。そのように考えると，特異性のある位置を表す変数と特異性のある方向を表す変数を同時に扱うことができる波束変換は，波面集合と相性のよい空間である。この特徴付けを利用して特異性伝播の解析を行った。

４．研究成果

（１）波束変換を用いた波面集合の特徴付けの研究は，G.B. Folland(1989)に始まり，Ōkaji(2001)でその改良が与えられているが，本研究ではさらなる改良を与えた。具体的には，波束変換の際に窓関数に仮定されていた条件を取り去り，窓関数が恒等的に 0 でない急減少関数でありさえすれば，Folland や Ōkaji らと同様の特徴付けが可能であることを示した。（加藤圭一氏，小林政晴氏との共同研究）

（２）ソボレフ型波面集合の波束変換による特徴付けを行った。この方向の研究は P. G’erard(1990)において，窓関数をガウス関数に限定した場合に，相空間上の点がソボ

レフ型波面集合に属するための必要十分条件が波束変換を用いて与えられている。また，Ōkaji (2001)においては、積分が 0 でない急減少関数を窓関数として，相空間上の点がソボレフ型波面集合に属するための必要条件および十分条件を与えている。本研究ではそれらの先行結果を改良し，恒等的に 0 でない急減少関数を窓関数として，相空間上の点がソボレフ型波面集合に属するための必要十分条件を与えた。（加藤圭一氏（東京理科大）、小林政晴氏（北海道大）との共同研究）

（３）　変数係数の 1 階双曲型偏微分方程式の解の特異性伝播に（２）の特徴づけを応用した。考える方程式を波束変換してから特性曲線の方法で解くというアイディアにより，波束変換による解の表示が得られる。この表示と（２）の特徴づけを組合せて，変数係数の 1 階双曲型偏微分方程式の解のソボレフ型波面集合の伝播に関する定理の別証明を与えた。現在，論文の投稿準備中である。（加藤圭一氏（東京理科大），杉山裕介氏（滋賀県立大）との共同研究）

（４）（３）で用いた波束変換による解の表示を高階分散型偏微分方程式へ応用し，モジュレーション空間上での解の評価を導出した。モジュレーション空間 M^p,q のノルムは，波束変換してから，元の空間の変数について L^p ノルム，フーリエ像の変数について L^q ノルムをとったものなので，波束変換による偏微分方程式の解の表示は，モジュレーション空間と相性が良いと考えられ，モジュレーション空間の枠組みでの解評価への利用が期待できる。当初の目的とは多少異なるが，上記の考え方を高階分散型偏微分方程式（自由シュレーディンガー方程式およびエアリー方程式を含む）に応用した。具体的には，考える偏微分方程式の解を波束変換を用いて表示し，その表示式を用いて，モジュレーション空間上での解の評価およびストリッカーツ型評価を得ることができた。現在、論文の投稿準備中である。（加藤圭一氏（東京理科大）、小林政晴氏（北海道大学）、高橋直氏との共同研究）

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　２　件）

(1) K.Kato, M.Kobayashi, S.Ito, Remark on characterization of wave front set by wave packet transform. Osaka J. Math. 54 (2017), no.2, 209-228. (査読あり)
(2) K.Kato, M.Kobayashi, S.Ito, Estimates for Schroedinger operators on modulation spaces. Harmonic analysis and nonlinear partial differential equations, 129-143, RIMS Kōkyūroku Bessatsu, B60, Res. Inst. Math. Sci (RIMS),Kyoto, 2016. (査読あり)

〔学会発表〕（計６件）

（１）伊藤真吾，加藤圭一，小林政晴，波束変換を用いた高階分散型偏微分方程式の解の表示とその応用，Saga workshop on Partial Differential Equations, 2019.
（２）伊藤真吾，加藤圭一，Characterization of wave front set by wave packet transform and its application，研究集会 シュレーディンガー方程式の数理とその周辺，2019.
（３）S.Ito, K.Kato, M.Kobayashi, Representation of higher-order dispersive operators via wave packet transform and its application, Peking-Yamagata-Tohoku Universities joint workshop for Harmonic Analysis and PDE，山形大学（山形県山形市），2018.
（４）伊藤真吾，加藤圭一，小林政晴，波束変換を用いた高階分散型方程式の解の表示とその応用，スペクトル・散乱葛飾シンポジウム，東京理科大学（東京都葛飾区），2018.
（５）伊藤真吾，加藤圭一，小林政晴，波束変換を用いた高階分散型方程式の解の表示とその応用，第７回室蘭非線形解析研究会，室蘭工業大学（北海道室蘭市），2017.
（６）伊藤真吾，加藤圭一，小林政晴，波束変換による波面集合の特徴づけについて，第 54 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム，神奈川大学（神奈川県横浜市），2015.

〔図書〕（計　０　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０　件）
○取得状況（計　０　件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：加藤　圭一
ローマ字氏名：Keiichi Kato

研究協力者氏名：小林　政晴
ローマ字氏名：Masaharu Kobayashi

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。