平成 30 年 5 月 31 日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K17579

研究課題名(和文) 渦糸の運動～数学的定式化と数学解析～

研究課題名(英文) Motion of Vortex Filaments -Mathematical Formulation and Analysis-

研究代表者

相木 雅次 (Aiki, Masashi)

東京理科大学・理工学部数学科・助教

研究者番号：90734400

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究においては、水などに代表される非圧縮非粘性流体内における渦糸の運動の数学解析を行った。渦糸とは流れの回転成分である渦度が曲線上に集中して分布したものであり、竜巻などの細かい渦を近似的に表現するために用いられる。本研究では渦糸がどのように運動するかを数学的に定式化し、さらに数学的に厳密な取り扱い(数学解析)を行うことによって渦を伴う流体運動の理論的な理解を深めることを目指してきた。

その結果、二つの渦糸が互いに影響を及ぼしながら動く状況、および一本の渦糸が斜面の上を動く状況それぞれの数学的定式化と数学解析に成功し、得られた結果を専門学術誌へと発表した。

研究成果の概要(英文)： In this research, we conducted the mathematical analysis of the motion of vortex filaments immersed in an incompressible and inviscid fluid. A vortex filament is a space curve on which the vorticity, the swirling component of the flow, of the fluid is concentrated. By mathematically modelling and analyzing the motion of vortex filaments, we aimed to further our understanding of the motion of fluids containing vortices.

Due to these efforts, we succeeded in the mathematical modelling and analysis of fluid motion related to the following two topics. One is the interaction of two vortex filaments, and the other is a vortex filament moving over a slanted plane.

研究分野：数物系科学

キーワード：渦糸 流体 非線形偏微分方程式 数学解析 数理モデリング

1. 研究開始当初の背景

竜巻、飛行機の翼から発生する渦、バブルリングなど、我々の身の回りには様々な渦運動が存在し、これら運動を流体の基本理論に基づいた定式化によって解明することは学術的な価値だけでなく、工学的な応用においても有用である。しかし、竜巻を筆頭にこれら現象を流体の基礎方程式に基づいて定式化および数学解析を行う試みは少ない。竜巻等においては流れの回転成分である渦度が中心軸付近に集中しているため、もっとも簡単な定式化としてその運動を「渦糸」の運動として記述することが考えられる。渦糸とは流体の渦度が曲線上に集中して分布したものをいうが、非圧縮非粘性流体に対して渦糸はラグランジュ保存量なので、実在する曲線として正当化される。渦糸の研究は古くから行われており、流体の渦度場から速度場を与える Biot-Savart の法則をもとにして得られた最初の非粘性モデル方程式は 1906 年に Da Rios^①によって提唱され、この方程式は Localized Induction Equation (LIE)として知られている。LIE は数学的に国内・国外の様々な人によって研究されており、西山-谷^②によって初期値問題の時間大域的適切性が示されている。相木も LIE の 3 次元半空間における初期値-境界値問題の時間大域的適切性を示した。また、Banica-Vega^{③, ④}, Gutierrez, Rivas, and Vega^⑤の一連の結果により、有限時間で角を形成する LIE の自己相似解の解析が行われている。しかし、LIE においては渦糸の回転運動のみ考慮されており、竜巻などのモデルとしては不十分であるといった側面がある。その後、軸方向流を考慮した渦糸の運動のモデル方程式が 1991 年に福本-宮崎^⑥によって提唱された（以後、このモデル方程式を福本-宮崎モデルと呼ぶ）。これまでに相木は福本-宮崎モデルに対する 3 次元半空間における初期値-境界値問題の時間局所適切性を証明した。このモデルについては他にも数学的な結果がいくつか知られており、主なものとしては初期値問題を扱った西山-谷^②や LIE を幾何学的に一般化し、初期値問題を扱った小野寺^⑦による結果がある。ともに時間大域解の存在と一意性を証明しているが、現象との比較が行われているわけではない。

また、物理現象との関連だけでなく、数学的にも渦糸の運動は曲線の運動を表す偏微分方程式として記述されるため、微分幾何学との関連も強く、LIE は曲線の曲率とれい率を用いた別表現が導出および研究されているほどである。

このことから渦糸に関する研究は偏微分方程式の分野のみならず、幾何学などを含む分野横断的な研究課題であるといえる。

2. 研究の目的

1. に記載した背景を念頭におき、「物理現象を数学的に定式化する」という基本方針の下、渦糸の運動を数学的に扱う。本研究で念頭においている渦運動における重要な要素として渦糸自身と周りの環境（壁・地面などの境界や他の渦糸）との相互作用が挙げられる。これら相互作用を考慮するために「二つの渦糸の相互作用」、および「複雑な地形の上を動く渦糸」の二つのトピックに分けてそれぞれを表す問題の定式化と数学解析を行う。具体的には以下の二つの問題に取り組む。

「二つの渦糸の相互作用」

曲線上に流体の渦度が集中したものが渦糸であるが、その曲線が閉じているとき（円など）、特にそのような渦糸を渦輪と呼ぶ。水中にできる空気の輪（バブルリング）などが代表的な例である。このトピックにおいては、直線上に並んだ二つの渦輪の leapfrogging と呼ばれる渦輪同士の追い越し現象を念頭において問題に取り組む。渦輪の自己運動を LIE によって表し、渦輪間の相互作用を Biot-Savart の法則によって表す。このようにして得られる方程式系に対する初期値問題の可解性を示す。さらに、leapfrogging に則した問題設定をするために渦輪の形を円に限定し、追い越し現象に対応するような時間周期解の存在を示すことを目的とする。

「複雑な地形の上を動く渦糸」

竜巻の運動や生成に対して地形は大きな影響を与える。渦糸に関しても、より現実的な問題設定にするためにこれまでの研究のような 3 次元半空間ではなく、地面に対応する境界が一般形で与えられた初期値-境界値問題の可解性、特に解の存在と一意性を示すことを目的とする。最初のステップとしてまずは LIE に対する問題を扱い、その後には福本-宮崎モデルに対する問題へと移行していく。

3. 研究の方法

(1) 「二つの渦糸の相互作用」については、当初の方針から変更し、渦糸同士の相互作用を表すために Biot-Savart の法則をそのまま用いるのではなく、Biot-Savart の法則にある種の近似を行うことにした。近似を行うことにより、元の偏微分-積分方程式系を扱う代わりに解の性質などを調べやすい偏微分方程式系の解析を行った。こうして得られた偏微分方程式系に対して追い越し現象に対応する解の存在を証明するため、解の具体形を想定して解の存在証明に取り組んだ。

(2) 「複雑な地形の上を動く渦糸」に関しては、LIE に対する初期値-境界値問題に取り組んだ。一般的な形で与えられる地形を扱う

ための第一歩として、斜面の上を動く渦糸を表す初期値-境界値問題に対する解のエネルギー評価を導出し、解の存在を証明する足がかりにする。

4. 研究成果

(1)「二つの渦糸の相互作用」については、研究の方法欄で述べた手法により、以下の偏微分方程式系の導出に成功した。

$$\begin{cases} X_t = \beta \frac{X_\xi \times X_{\xi\xi}}{|X_\xi|^3} - \alpha \frac{Y_\xi \times (X - Y)}{|X - Y|^3}, \\ Y_t = \frac{Y_\xi \times Y_{\xi\xi}}{|Y_\xi|^3} - \alpha\beta \frac{X_\xi \times (Y - X)}{|X - Y|^3}, \end{cases}$$

ここで、 X, Y は、時刻 t において ξ によってパラメータ付けされた二つの渦糸の位置ベクトル、 $\times$ は、3次元ユークリッド空間における外積、下付き添え字はその変数に関する偏微分、そして α, β は定数である。上記偏微分方程式系を(P1)と置く。

これまで、国内・国外における leapfrogging に関する研究は Dyson ⑧, ⑨によって導出された数理モデルに対するものが主であった。例えば、Borisov, Kilin, and Mamev ⑩においては、Dyson のモデルに対して leapfrogging が起こるための必要十分条件が導出されている。Dyson のモデルは、二つの渦輪が軸上に並んだ状態を仮定し、渦輪の半径と軸に沿った変位を未知変数とする常微分方程式系として導出されている。そのため、渦輪の運動の数理モデルとしては扱える状況が制限される。特に、渦輪の形が円形から変化するような状況を表すことはできない。今回新たに導出した偏微分方程式系(P1)は、導出の際には渦糸が円形であることを仮定していないため、より一般的な形をした渦糸の運動、そして渦糸同士の相互作用を表現し得る。本研究では、そのような偏微分方程式系(P1)を導出し、特に二つの渦輪が軸上に並んでいる場合を考察し、leapfrogging に対応するような時間周期解の存在を証明した。これら結果を専門学術誌へと投稿した。

本結果を足掛かりに、leapfrogging の安定性など、Dyson のモデルでは扱えなかった問題に取り組むことも可能になった。また、渦糸の様々な相互作用を表現し得る方程式系(P1)の特殊な場合として leapfrogging を扱ったため、今後、leapfrogging 以外の様々な現象を同じ方程式系(P1)を用いて定式化し、「渦糸の相互作用」という広い枠組みの中においてそれぞれの現象がどのような関係になっているのかを明らかにしていく予定である。

(2)「複雑な地形の上を動く渦糸」については、斜面の上を動く渦糸の運動を表す以下

の初期値-境界値問題に取り組んだ。

$$\begin{cases} X_t = X_s \times X_{ss}, \\ X(s, 0) = X_0(s), \\ X_s(0, t) = a, X_s(L, t) = e_3. \end{cases}$$

ここで、 X は時刻 t において弧長 s によってパラメータ付けされた渦糸の位置ベクトル、 a は任意の単位ベクトル、 $e_3 = (0, 0, 1)$ である。上記の初期値-境界値問題は、「ベクトル a と垂直な平面」として表現される斜面の上を動く渦糸の運動を表している。上記初期値-境界値問題を(P2)とおく。(P2)に対しては、時間大域解の存在と一意性を証明した。

これまでにも渦糸の運動のLIEを用いた数学的な結果はいくつも得られているが、その多くは境界との相互作用の起こらない初期値問題に対するものが主であった。本研究においては、竜巻の運動などを念頭におき、渦糸の端点が地面に見立てた斜面を滑るように動くことを許容した問題設定を行っている。実際、問題(P2)にしたがって動く渦糸は、初期時刻において端点が斜面の上に乗っていれば、端点は常に斜面の上に乗っていることが証明される。しかし、一般に端点は固定されておらず、斜面の上を動くことは許容されている。このように、境界の上を複雑に動く渦糸の運動を解析するため、本研究においては端点における渦糸の形状の詳細な解析が重要な役割を果たした。このような境界付近における渦糸の挙動はこれまでほとんど解析されておらず、今後より一般の形状をした地面の上を動く渦糸の運動を解析する足掛かりになることが期待される。

<引用文献>

- ① L. S. Da Rios,
Sul Moto D'un Liquido Indefinito Con Un Filetto Vorticoso Di Forma Qualunque,
Rend. Circ. Mat. Palermo, **22** (1906),
no. 1, pp. 117-135
- ② T. Nishiyama and A. Tani,
Initial and Initial-Boundary Value Problems for a Vortex Filament with or without Axial Flow, *SIAM J. Math. Anal.*, **27** (1996), no. 4, pp. 1015-1023.
- ③ V. Banica and L. Vega,
On the Stability of a Singular Vortex Dynamics, *Commun. Math. Phys.*, **286** (2009), pp. 593-627.
- ④ V. Banica and L. Vega,
Scattering for 1D cubic NLS and singular vortex dynamics, *J. Eur. Math. Soc.*, **14** (2012), pp. 209-253.
- ⑤ S. Gutierrez, J. Rivas, and L. Vega,
Formation of Singularities and Self-Similar Vortex Motion Under the

Localized Induction Approximation, *Comm. Partial Differential Equations*, **28** (2003), no. 5 and 6, pp.927-968.

- ⑥ Y. Fukumoto and T. Miyazaki, Three-dimensional distortions of a vortex filament with axial velocity, *J. Fluid Mech.*, **222** (1991), pp. 369-416.
- ⑦ E. Onodera, A remark on the global existence of a third order dispersive flow into locally Hermitian symmetric spaces, *Comm. Partial Differential Equations*, **35** (2010), no. 6, pp.1130-1144.
- ⑧ F. Dyson, The Potential of an Anchor Ring, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **184** (1893), pp. 43-95.
- ⑨ F. Dyson, The Potential of an Anchor Ring - Part II, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **184** (1893), pp.1107-1169.
- ⑩ A.V. Borisov, A.A. Kilin, and I.S. Mamaev, The Dynamics of Vortex Rings: Leapfrogging, Choreographies and the Stability Problem, *Regul. Chaotic Dyn.* **18** (2013), pp. 33-62

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

- (1) Masashi Aiki, Motion of a vortex filament on a slanted plane, *J. Differential Equations*, **263** (2017), pp.6885-6915. 査読あり, DOI: 10.1016/j.jde.2017.07.036

[学会発表] (計 10 件)

- (1) 相木雅次 Motion of a Vortex Filament on a Slanted Plane, 若手による流体力学の基礎方程式研究集会, 2018.
- (2) 相木雅次 Motion of a Vortex Filament on a Slanted Plane, 神戸大学「解析セミナー」, 2017.
- (3) 相木雅次 Motion of a Vortex Filament on a Slanted Plane, 明治非線型数理セミナー, 2017.
- (4) 相木雅次

Motion of a Vortex Filament on a Slanted Plane, The 14th International Conference on Free Boundary Problems Theory and Application, 2017.

- (5) 相木雅次 Mathematical Analysis of the Motion of a Vortex Filament, Fifth China-Japan Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, 2015.
- (6) 相木雅次 Analysis of the Motion of a Vortex Filament, 4th International Conference on Mathematical Theory of Turbulence via Harmonic Analysis and Computational Fluid Dynamics, 2015.

6. 研究組織

- (1) 研究代表者
相木 雅次 (Aiki, Masashi)
東京理科大学・理工学部数学科・助教

研究者番号 : 90734400