

平成 30 年 6 月 15 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K17634

研究課題名(和文) 超対称場の理論における双対性とループ演算子の代数：可積分系とクラスター代数

研究課題名(英文) Duality and algebra of loop operators in supersymmetric field theories:
integrable systems and cluster algebras

研究代表者

山崎 雅人 (Yamazaki, Masahito)

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・准教授

研究者番号：00726599

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 2次元の超対称理論から、新たな可積分モデルを構成(2) 3次元・3次元対応における位相欠陥について、クラスター代数やAdS/CFT対応など複数の手法を組み合わせる包括的に議論(3) クラスター代数にもとづき、可積分系の基礎方程式であるヤン＝バクスター方程式の新たな拡張を提唱(4) 体積予想の閉じた多様体上版を摂動論の任意の次数にまで拡張する新たな予想を提唱(5) 量子離散戸田理論をクラスター代数の方法により定式化し、量子カオスとの関係を議論(6) 超対称ゲージ理論から現れる可積分系の古典極限を議論し、カイラルポッツモデルその他の古典離散可積分モデルが現れることを示した

研究成果の概要(英文)：(1) constructed new integrable models from 2d quantum field theory (2) comprehensive discussion of topological defects in 3d/3d correspondence, by cluster algebra, AdS/CFT correspondence etc. (3) proposed a novel generalization of the Yang-Baxter equation, based on cluster algebras (4) proposed a new all-order conjecture for the closed 3-manifold version of the volume conjecture (5) formulated quantum discrete Toda theory via cluster algebras, and discussed connection with quantum chaos (6) discussed semi-classical limit of the integrable models arising from supersymmetric gauge theories, and showed that we obtain chiral Potts and other discrete classical integrable models

研究分野：素粒子理論

キーワード：量子場の理論 可積分系 クラスター代数

1. 研究開始当初の背景

場の理論はこの自然界の様々な現象を記述する枠組みとして大きな成功をおさめてきた。しかしその一方で、場の理論の既存の枠組みはファインマン図による摂動論の方法が破綻する非摂動的な現象を理解するためには不十分である。また、全く異なるラグランジアンを持つ複数の場の理論が、低エネルギー極限において全く同じ物理を記述する現象である**双対性**は、伝統的な場の理論では殆どの場合、その証拠は間接的ではない。このように、場の理論の非摂動効果や双対性をより直接・明白に理解することの出来る新たな枠組みが強く求められている。

超対称性を持つ場の理論は、その対称性ゆえにしばしば厳密な解析が可能であり、この難問に取り組むためにうってつけの理論といえる。近年、超対称場の理論についての理解が一新されようとしている。超弦理論によって触発されたこのアプローチ(これを申請者は**幾何的ゲージ理論**と名付けた)では、通常考えられてきたラグランジアンに代わってより基本的な構造、具体的には例えば多様体から出発する。このとき、対応する超対称場の理論の双対性は単純な数学的性質に置き換えられ理論の構成上明示的となる利点がある。

この新たな理解は新しい一連の超対称場の理論を生みだし、それらの間の双対性を明らかにしてきた。この発展において、申請者は3次元多様体上のChern-Simons理論と3次元超対称ゲージ理論との関係を世界に先駆けて発表した[Terashima-Yamazaki, JHEP, 2011]ほか、4次元二色グラフによって記述される新たな4次元超対称ゲージ理論を定義し、その性質を調べてきた[Xie-Yamazaki, JHEP, 2012]。また、これらの超対称ゲージ理論を調べるための定量的な分配関数(例えばレンズ空間を用いた4次元の分配関数)の計算方法も開発してきた。

2. 研究の目的

本研究では、超対称ゲージ理論の空間の幾何的・代数的構造、特に可積分構造・クラスタ代数構造を調べることを目的とする。理論の持つ**双対性**や理論の中の**演算子(例えばループ演算子)のなす代数**に注目することにより、場の理論の新たな定式化の可能性を探ることも視野に入れている。

3. 研究の方法

本研究では上記の思想を推し進め、超対称ゲージ理論の空間に存在する数学的な可積分・代数構造を明らかにすることを目指す。さらに、そこから一歩進んで逆に、理論の双対性、また理論の演算子のなす代数といったデータが逆に理論そのものを決定しており、新しい場の理論の定義を与える証拠を集めていく。これらの考え方は超対称性を持たない場の理論にも適用でき、それゆえ場の理論の定式化に関する冒頭の問いに答えを与える可能性を秘めている。

以下、大まかに分けて二つのトピックについて記述する。

[可積分構造としての超対称場の理論の双対性]

場の理論の双対性は現在の場の理論の本質的な問題であるが、それはどのような数学的構造を与えるのだろうか? 筆者は4次元超対称場の理論の文脈において、双対性が可積分系のヤン・バクスター方程式に直接対応することを示した[Yamazaki, J. Stat. Phys., 2013]。本研究では、その考えを2次元、5次元の超対称ゲージ理論に適用し、それぞれの**場の理論の双対性がヤン・バクスター方程式に読み替えられる**ことを示す。また、その副産物として、場の理論の分配関数から新しい可積分モデルを構成することができる。

[超対称ゲージ理論の BPS ループ演算子のな

す代数とクラスター代数構造]

場の理論の双対性は電場と磁場を入れ替える対称性であり、従ってそれらにチャージを持ったループ演算子(ウイルソン・ループの一般化)をも入れ替える。ループ演算子は片方が電荷、片方が磁荷を持つとき交換せず、非可換な代数(ループ演算子の代数)をなすことが知られている。既に3次元超対称場の理論の文脈において、研究代表者らはループ演算子のなす代数が数学で既に知られていたクラスター代数と同一視出来る可能性を指摘したが[Terashima-Yamazaki, PTEP, 2013], 決定的な証拠は得られていなかった。

本研究は、超対称ゲージ理論を定式化する新たなパラダイムである「幾何的ゲージ理論」の考えを推し進めるものである。研究の対象としている超対称ゲージ理論は、研究代表者がここ数年にわたって継続して研究してきた理論であり、国際会議における数多くの招待講演があるほか、また関連した論文の引用件数は2011年から既に計300件超に達しており、世界的にも評価が高い。場の理論の新たな定式化という概念的な問題が、具体的かつ厳密な計算の枠内で精密に議論できるのが本研究の大きな利点である。

本研究のもう一つの大きな魅力は、超対称ゲージ理論の研究であるのにとどまらず、統計物理学や数学といった関連分野に大きなインパクトを与えてきている点である。幸いにして日本ではこれらの分野では物理・数学の双方に長年の研究の伝統があり、国内の研究者と交流を深め、分野間の交流に貢献した。

4. 研究成果

本研究では可積分系やクラスター代数を中心に、場の理論や数学において多くの成果を得た。

本研究で得られた成果は多岐にわたって

おり、その全てについてここで言及するのは困難であるが、ここではそのうち本研究の当初研究予定に比較的近い内容のものについて、最終年度を含め、これまでの本研究での実績について箇条書きでまとめる。なお、これらの研究の多くは、共同研究者との共著論文による成果である。

(1) 2次元の超対称 $N=(2,2)$ 理論から、新たな可積分模型を構成した

(2) 3次元・3次元対応における位相欠陥について、クラスター代数やAdS/CFT対応など複数の手法を組み合わせる包括的に議論した

(3) クラスター代数にもとづき、可積分系の基礎方程式であるヤン=バクスター方程式の新たな拡張を提唱した。

(4) 体積予想は結び目理論における予想であるが、その閉じた多様体上版を摂動論の任意の次数にまで拡張する新たな予想を提唱した

(5) 量子離散戸田理論をクラスター代数の方法により定式化し、量子カオスとの関係について議論した

(6) 超対称ゲージ理論から現れる可積分系の古典極限を議論し、その極限においてカイラルポッツ模型その他の古典離散可積分模型が現れることを示した

(7) クイバーやクラスター代数の手法と、いわゆるスペクトラルネットワークの手法の間の橋渡しをする「BPS グラフ」の概念を導入し、それをを用いて2次元リーマン面の写像類群の新たな表現を構成した。

5. 主な発表論文等(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

これらについては既に各年度の実施状況報告書に記載したのでここで重複して全てを記述することはしない。
詳細については科研費データベース

<https://kaken.nii.ac.jp>

から情報を参照されたい。ここでは主たるものについて記載する：

〔雑誌論文〕(計 17 件)

Masahito Yamazaki, “Quantum trilogy: discrete Toda, Y-system and chaos”, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 51, 053002 ~ 053002 (2018)

〔学会発表〕(計 15 件)

Masahito Yamazaki, “All-order volume conjecture for closed 3-manifolds”, Quantum Knot Homology and Supersymmetric Gauge Theories, 2018

〔図書〕(計 1 件)

山崎雅人, 場の理論の構造と幾何, サイエンス社, 2015 年, 232pp

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等：<http://member.ipmu.jp/masahito.yamazaki/>により情報発信を行っている

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山崎雅人 (YAMAZAKI, Masahito)

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・准教授

研究者番号：00726599

(2) (3) (4) 研究分担者 / 連携研究者 / 研究