

平成 30 年 6 月 19 日現在

機関番号：11101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K20848

研究課題名(和文)関数から方程式へと展開する数学教育カリキュラムの開発

研究課題名(英文)development of the curriculum in mathematics education having connections of teaching materials from a function to an equation

研究代表者

田中 義久(TANAKA, Yoshihisa)

弘前大学・教育学部・准教授

研究者番号：80610633

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、関数から方程式へと展開する数学教育カリキュラムを開発し、その効果を明らかにすることであった。

このために、昭和18,19年に作られた国定教科書『中等数学』の分析を行い、一次方程式に関する段階的な構成を特定した。また、一次方程式の理解に関する実態調査を行い、 $2x=3-x$ といった両辺に文字のある方程式を除いた簡単な方程式であれば、生徒は逆算によって解決できることを確認した。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this study was to develop the curriculum of mathematics education having connections of teaching materials from a function to an equation, and to clarify an effect of the curriculum.

I analyzed a textbook "Secondary Mathematics, Category " made in 18,19 year of the Showa era and identified the graded constitution about the linear equation.

I performed the fact-finding about the understanding of the linear equation. I confirmed that the students solved the easy equation by inverse operation except the equation with the letter in the both sides like  $2x=3-x$ .

研究分野：複合領域

キーワード：数学教育 カリキュラム開発 関数

1. 研究開始当初の背景

これまでに、高度情報化社会に対応するための数学教育カリキュラムの開発（杉山吉茂他，1998，1999）が進められてきた。この研究では、「様々な現象を関数という視点でとらえる」（清水美恵，1999）というアイデアに基づいて複数のモデル単元の開発が行われ、教材開発の視点が明らかにされた。

一方、数学を活用する能力は、高度情報化社会を生き抜いていく生徒にとって必要な能力である。生徒が数学を活用して問題を解決することとは、次の数学的問題解決過程を踏むことである。まず、事象を数理的にとらえて、表、グラフ、式に表す。次に、それらに数学的作業を施して数学的結論を得る。最後に、その結論を元の事象に照らして解釈・評価し考察する。このように、事象を数理的にとらえて、表、グラフ、式に表すためには、事象の変化に眼を向け数量間の関係を考察することが解決のための第一歩である。このとき、事象の変化をとらえようとする関数的な見方が解決のための重要な役割を担う。事象の変化によっては、数量間の関係を式に表せるものばかりではない。このため、点で表されたグラフから関係をとらえて関数とみることが必要である。しかし、データをグラフ化して問題を解決する生徒が少なく、数表とグラフが「別のもの」と認識している生徒の実態が報告されている（清水美恵，1998）。

こうした実態の背景には、今日の数学教科書に関し、方程式の単元が関数の単元よりも先行して位置づけられているために表から式を求める解決が暗黙のうちに強調されていること、グラフが扱われる段階でも式に表せる事象の変化が扱われるため、グラフの必要性が感得されていない可能性が挙げられる。このため、関数を中心とした教材内容を構成し、グラフを問題解決のための道具として積極的に用いることのできるカリキュラムの整備が必要である。実際、学習指導要領の改訂に向けた提言において、関数を中心としグラフを問題解決の道具に用いることによって数学の有用性を感得できるカリキュラムの必要性が強調されている（藤井齊亮，2006）。

2. 研究の目的

『生かす数学』（代表 杉山吉茂，2007）や『TGUISS 数学』（東京学芸大学附属国際中等教育学校数学教育研究会，2008）は、関数から方程式へと展開する教材内容の構成を持ってはいるものの、関数の教材と方程式の教材とを結びつけ、方程式の必要性を感じさせる間は構成されていない。実際、二次関数から二次方程式へと展開する『生かす数学』に基づく授業が実践され（新井仁，2008），その効果が明らかにされているものの、方程式の学習の必要性や充実に関する言及はなされていない。さらに、これまでに一次関数から一次方程式へと展開する授業の実践は

報告されていない。このため、関数から方程式へと展開する教材内容の構成原理を明らかにしてモデル単元を構築することが必要である。

本研究の目的は、関数から方程式へと展開する数学教育カリキュラムを開発し、その効果を明らかにすることである。

3. 研究の方法

上記の目的のために、教材内容の構成原理を特定するとともに、その原理に基づいたモデル単元を生徒の実態を踏まえて構築する。

具体的には、まず、教材内容の構成原理を特定するために、方程式を中心とした教材内容の構成を持つ五種検定教科書の特徴を明らかにすることが第一の課題である。次に、昭和 10 年代に作られた関数を中心とした構成を持つ数学教科書の分析を行い、関数を中心とした教材内容の構成原理を特定することが第二の課題である。

生徒の実態を踏まえたモデル単元を構築するために、調査問題を作成・実施し、方程式に関する生徒の理解の実態をとらえることが第三の課題である。この実態調査の結果を受けて、モデル単元を構築することが第四の課題である。

4. 研究成果

以下では、本研究の主たる知見を 4 つにわけて記述する。

（1）一次方程式に関する段階的な構成  
次の 3 つの分析の視点を設定し、方程式を中心とした教材構成を有する五種検定教科書を分析した。

等式の性質と移項の教科書構成上の位置づけにある一定の期間が設けられているかどうか

逆算による解決が紙面上に現れているかどうか

両辺に文字のある方程式がどのような数学内容とともに構成されているか

これら 3 つの分析の視点毎に各教科書，すなわち，東京高等師範学校附属中学校内数学研究会著『中等教育 算術代数』（A とする），広島高等師範学校附属中学校数学研究会著『最新 中等算術代数』（B とする），掛谷宗一著『中等数学算術代数学』（C とする），竹内端三著『中等算術代数学教科書 基本課程』（D とする），阿部八代太郎著『現代新算術代数』（E とする）の特徴を整理したものが次の表 1 である。

表 1. 五種検定教科書に関する特徴

A		x	移項とともに
B	x		等式の性質・移項とともに
C		x	等式の性質とともに
D	x		等式の性質・移項とともに
E	x		移項とともに

五種検定教科書の中には、等式の性質による解決と移項による解決との間にある期間が設けられた段階的な構成だけでなく、逆算による解決と等式の性質・移項による解決との間にある期間が設けられた段階的な構成があることが明らかとなった。

(2) 関数から方程式へのつながりにおける方程式の段階的な構成

関数を中心とした教材構成を有する一種検定教科書『数学 第一類』が昭和18年、19年に、国定教科書『中等数学 第一類』が昭和19年に作られた。これらの教科書について、上記(1)の分析の視点からに次の視点を加えた分析を行った。

逆算による解決と等式の性質・移項による解決との教科書構成上の位置づけにある一定の期間が設けられているかどうか

これら4つの分析の視点毎に『数学 第一類』と『中等数学 第一類』の特徴を整理したものが次の表2である。

表2. 一種検定及び国定教科書の特徴

数学	-		-	
中等数学	×		二直線の交点 グラフの平行移動 等式の性質・移項と ともに	

『中等数学 第一類』における一次方程式に関する段階的な構成には、逆算で解ける方程式に限定された第一学年の段階と、等式の性質や移項による方程式の形式的な処理を学ばせる第二学年の段階という2つの段階があった。等式の性質の導入に対し、それが必要ではない方程式と、必要な方程式とを区別することで、一次方程式に関する段階的な構成が構築されていたのである。上記の表2にあるように、両辺に文字のある方程式は、グラフの平行移動という操作を含む二直線の交点を求める解決と関連づけられていた。

『中等数学 第一類』の教材構成は、今日の数学教育において関数を中心とした教材構成を志向しつつ方程式の内容を充実させた教材構成の一つのモデルとしての価値がある。

今日の教科書における等式の性質や移項を導入する契機は、方程式を学習した直後であるため、文字式を学習して間もない生徒にとって性急である可能性がある。『中等数学 第一類』にある方程式の段階的な構成は、今日の教科書の教材構成を見直すための方向性を与えている。

(3) 一次方程式の解決に関する生徒の実態調査

中学校1年生に対する方程式の学習におい

ては、生徒の理解の実態に注意を払いながら、逆算による解決を通して一次方程式の意味を理解させ、必要性を伴って式の形式的な操作としての「等式の性質」を理解させる過程へと移行することが重要である。なぜならば、逆算によって未知数を求める方法から「等式の性質」によって未知数を求める方法への移行は、「思考の再構造化を必要とする」(大谷実ほか, 2006, p.248)とされているからである。

一方、今日の教科書では、方程式の導入後、すぐに「等式の性質」の学習指導が想定されている。もしも、逆算による解決を意識させず一次方程式の意味を理解できていないまま「等式の性質」が学ばれているならば、逆算による解決と「等式の性質」を用いた解決との差異を意識したり、両者の解決の関連を考へたりすることは困難となることが予想できる。そこで、「等式の性質」が未習の段階における生徒の一次方程式の理解の実態、具体的には、生徒がどのような一次方程式を、どのような方法を用いて解決するのかの実態を把握する必要があると考えた。

田中良運(1940)の調査問題と調査結果に基づいた同様の調査問題を作成し、今日の生徒(中学校1年生159名)に対する実態調査を行った。調査問題は、 $3x+2=14$ といった一方の辺に文字のある方程式7問で構成される「問題1」と、 $3x-2=2x-7$ といった両辺に文字のある方程式2問で構成される「問題2」とで構成され、「問題1」「問題2」を解決させた後に、両者の問題の解決方法の違いを記述させるものであった。以下の表3は、「問題1」「問題2」に対する正答率である。

表3. 全問正答と1問のみ誤答の割合(%)

	全問正答(%)	1問誤答(%)
問題1	61.6%	27.7%
問題2	54.7%	24.5%

次に、問題1に関して、まず、自由記述欄に、「逆算」や「逆の計算」、「たしかめ算」といった逆算に関する記述<sup>1)</sup>があるかどうかを整理した。

表4. 逆算に関する記述有無

	あり	なし
記述の有無	43.4% (63/159)	56.4% (96/159)

この結果、4割を超える生徒が、逆算に関する記述をしていたことがわかった。具体的な記述としては「 $1/3 \times \dots$ 」なので答えの「7」に逆に「 $7 \div 1/3$ をした」や「xに合う数を逆算で求めた」がみられた。

次に、逆算に関する記述「なし」についてみてみると、9.4%(15/159)の生徒が、「なんとなくあてはめていった」のように、代入に

よって解を求めていたことがわかった。なお、15.7%(25/159)の生徒が、「移項して方程式の形で求めた」のように移項、等式の性質によって求めていたこともわかった。

これらから、今日の生徒が用いている解決の方法も、主として逆算による解決であり、逆算を用いて解決できることがわかった。両辺に文字のある一次方程式以外であれば「等式の性質」を用いなくとも、逆算によって解決できる実態が明らかとなった。

#### (4) 生徒の実態に基づく学習指導の構想

生徒の実態調査に基づいて、一次方程式に関する学習指導を構想した。具体的には、本時のねらいを「両辺に文字のある方程式では逆算による解決を用いることが困難であることを意識することができる」とともに、代入による解決が簡潔であったかどうかを吟味することで新たな解決の必要性を意識することができる」として以下の問題解決型の授業の展開 1), 2), 3) を構想し、その後の展開として 4) を示した。

- 1) 「問題 1」における逆算による解決の顕在化
- 2) 「等式の性質」の学習以前における両辺に文字のある方程式との対峙
- 3) 比較検討場面における代入による解決の顕在化とその簡潔性の吟味
- 4) 「等式の性質」の活用によるよさの感得

1)については、「問題 1」を自力解決させ、比較検討場面を作って全体指導において振り返らせ、逆算を用いていたことを顕在化させる。2)については、「問題 2」に対峙させ、両辺に文字のある方程式に対して逆算を用いることの困難性に対峙させ、生徒に、これまでの解決が使えないことへの葛藤を感じさせる。3)については、解決のアイデアとして代入を用いたことを顕在化させ、さらに新たな解決の必要性を意識させた上で、「等式の性質」を導入する。

逆算によって未知数を求める方法から「等式の性質」によって未知数を求める方法への移行は、「思考の再構造化を必要とする」と言われている。両辺に文字のある方程式を「等式の性質」を学習する前に生徒に対峙させることで、「思考の再構造化」の必要性を生徒が意識できる授業の展開となる。

4)については、新たな解決の必要性の意識を伴って「等式の性質」を学ぶことがより深い学びとなり、比較対象がはっきりすることにより新たに学んだ内容のよさの感得につながると考えた。

今後は、二次関数から二次方程式へとつながる実践授業におけるグラフの対称性に着目した解決の分析を進めるとともに、一次方程式に関する実態の異なる他地域の生徒に対する実態調査結果の分析を進め、これに基づいた一次関数から一次方程式へとつながるモデル単元の精緻化と実践が課題である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 1 件)

田中義久, 「一次方程式に関する教材内容の構成についての一考察 - 五種検定教科書の分析を通して - 」, 査読無, 数学教育史研究, 第 17 号, 33-40, 2017

〔学会発表〕(計 2 件)

田中義久, 「『中等数学第一類』の一次関数を中心とした教材構成の分析 - 一次方程式の段階的な構成に焦点をあてて - 」, 日本数学教育学会 第 6 回春期研究大会論文集, 225-232, 2018.6.10, 「千葉大学(千葉県)」

田中義久, 「一次方程式の解決の方法に関する実態調査 - 田中良運(1940)の報告に基づいて - 」, 日本数学教育学会 第 49 回秋期研究大会発表集録, 181-182, 2016.10.30, 「弘前大学(青森県)」

〔図書〕(計 3 件)

田中義久, 東洋館出版社, 「子どもを見る目」に焦点をあてた授業研究とその実践」『数学教育学の礎と創造』, 2017, 56-67.

田中義久, 明治図書, 「解決方法を意識してみよう」, 『教育科学 数学教育 すぐに使える最新アクティブラーニング型教材集』, 2017, No.718, 4-7

田中義久, 一藝社, 「関数の考えと算数との関連(接続)」『算数・数学科教育』, 2015, 213-218

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

田中義久 (TANAKA, Yoshihisa)  
弘前大学・教育学研究科・准教授  
研究者番号: 80610633

### (2) 研究分担者

該当者なし

### (3) 連携研究者

藤井齊亮 (FUJII, Toshiakira)  
東京学芸大学・教育学研究科・教授  
研究者番号: 60199289  
西村圭一 (NISHIMURA, Keiiti)  
東京学芸大学・教育学研究科・教授  
研究者番号: 30549358  
清野辰彦 (SEINO, Tatsuhiko)  
東京学芸大学・教育学研究科・准教授  
研究者番号: 00550740

### (4) 研究協力者

小岩大 (KOIWA, Dai)  
東京学芸大学附属竹早中学校教諭  
小野貞治 (ONO, Sadaharu)  
弘前大学教育学部附属中学校教諭  
齋藤康広 (SAITO, Yasuhiro)  
弘前大学教育学部附属中学校教諭