

平成 30 年 6 月 20 日現在

機関番号：12102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K20885

研究課題名(和文)スペクトラルグラフ理論を用いた離散構造とアルゴリズムの研究

研究課題名(英文)Research on Discrete Structure and Algorithms by using Spectral Graph Theory

研究代表者

佐野 良夫 (Sano, Yoshio)

筑波大学・システム情報系・准教授

研究者番号：20650261

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：研究成果の概要は、次の通りである。一般化ベータ木と呼ばれるグラフのライン・グラフの固有値および固有多項式についての研究を行い、この研究で得られた結果により、2003年のCvetkovic-Stevanovicの未解決問題が解決された。符号付隣接行列の最小固有値が -2 より大きい辺符号付グラフの完全な分類を与えた。この結果は、1979年のDoob-Cvetkovicによる最小固有値が -2 より大きいグラフの分類に関する古典的な結果の一般化となっている。また特筆すべきこととして、本研究で得られた結果により、未解決問題だった1977年のHoffmanの予想が解決された。

研究成果の概要(英文)：We have obtained the following results: (i) We studied the eigenvalues and the characteristic polynomials of the line graphs of generalized Bethe trees, and we solved an open problem posed by Cvetkovic and Stevanovic in 2003 by using our results. (ii) We gave a complete classification of edge-signed graphs whose signed adjacency matrices have smallest eigenvalue greater than -2 , which is a generalization of a classical result on the classification of graphs whose adjacency matrices have smallest eigenvalue greater than -2 by Doob and Cvetkovic in 1980. As a result, we solved a conjecture by Hoffman given in 1977. Also we obtained new results on Hoffman graphs by using our results.

研究分野：離散数学

キーワード：グラフ理論 アルゴリズム グラフ固有値 離散構造 マトロイド マッチング メカニズムデザイン

1. 研究開始当初の背景

本研究では、スペクトラルグラフ理論の理論的な側面の研究を行う。より具体的な内容としては、「グラフの隣接行列の最小固有値を制限した際に現れうるグラフ構造の解明」という研究テーマに重点を置き研究を進めていこうとしていた。

このテーマについての研究背景としては、まず 1976 年の Cameron, Goethals, Seidel, & Shult による、最小固有値が -2 以上であるグラフの分類・特徴づけがあげられる。彼らは、最小固有値が -2 以上であるグラフは、一般化ライン・グラフであるか、ルート系 E_8 に関連する有限個の例外グラフのどちらかであるという非常にきれいな結果を示した。その後、1977 年 Hoffman は、固有値に関する制限を緩め、最小固有値が $-1 - 2 = -2.414\dots$ 以上であるグラフに関して、グラフにクリークを付け加えるというテクニックを用いてその構造についての研究を行った。さらに 1995 年 Woo & Neumaier は、上記の Hoffman のアイデアについて、「ホフマン・グラフ」と呼ばれるグラフの一般化を導入することにより、再定式化を行った。その結果、より詳細な議論が可能な形となった。

この「ホフマン・グラフ」に関する最近の研究結果としては、2008 年、2012 年の Taniguchi による最小固有値 $-1 - 2$ 以上のグラフについての関連研究、2012 年の Yu による正則グラフの最小固有値の集積点に関する研究、2014 年の Jang, Koolen, Munemasa, & Taniguchi による最小固有値 -3 以上のホフマン・グラフに関して扱った論文が挙げられる。

2. 研究の目的

本研究では、スペクトラルグラフ理論の手

法を用いて、離散構造およびアルゴリズムに関する研究を行う。本研究の目的は、グラフの隣接行列の最小固有値を制限した際に現れうるグラフ構造の解明である。特に、ホフマン・グラフと呼ばれる離散構造の固有値に関する条件と現れ得る構造の関係について明らかにすることを目標とし、最小固有値 -3 以上のホフマン・グラフの構造のいくつかの仮定のもとでの分類を目指す。さらに、その研究の過程において、禁止構造列挙に関する効率の良いアルゴリズムを設計することも目的とする。

3. 研究の方法

研究の方法としては、本研究に関連する論文・文献調査を継続的に行うとともに、本研究に関連する国際会議や研究集会に参加することで最新の情報を収集しつつ、共同研究者たちと定期的に連絡を取り合うことによって、計画的に研究を推進した。

4. 研究成果

研究を進めた結果、以下のことが明らかになった。

一般化バーテ木と呼ばれるグラフのライン・グラフの固有値および固有多項式についての研究を行い、この研究で得られた結果により、2003 年の Cvetković-Stevanović の未解決問題が解決された。

符号付隣接行列の最小固有値が -2 より大きい辺符号付グラフの完全な分類を与えた。この結果は、1979 年の Doob-Cvetković による最小固有値が -2 より大きいグラフの分類に関する古典的な結果の一般化となっている。また特筆すべきこととして、本研究で得られた結果により、未解決問題だった 1977 年の Hoffman の予想が解決された。さらにこの結果を用いて、ホフマン・グラフと

呼ばれる離散構造についての新たな結果が得られた。

また、上記以外に、グラフ理論、離散構造に関する研究成果として、競争グラフ、トラベル・グループoid、H-マトロイドなどに関する様々な結果が得られた。さらに、ランダム割り当て問題の一般化に対するアルゴリズムおよびメカニズムデザインに関する結果も得られた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 14 件)

S. Fujishige, Y. Sano, and P. Zhan: The random assignment problem with submodular constraints on goods, *ACM Transactions on Economics and Computation* **6** (2018) Article 3, 28 pages. (査読有)

J. R. Cho, J. Park, and Y. Sano: T-neighbor systems and travel groupoids on a graph, *Graphs and Combinatorics* **33** (2017) 1521-1529. (査読有)

S. C. Lee, J. Choi, S.-R. Kim, and Y. Sano: On the phylogeny graphs of degree-bounded digraphs, *Discrete Applied Mathematics* **223** (2017) 83-93. (査読有)

J. Choi, S.-R. Kim, J. Y. Lee, and Y. Sano: On the partial order competition dimensions of chordal graphs, *Discrete Applied Mathematics* **222** (2017) 89-96. (査読有)

Y. Sano: On the competition numbers of diamond-free graphs, *Lecture Notes in Computer Science* **9943** (2016) 247-252. (査読有)

J. Choi, K. S. Kim, S.-R. Kim, J. Y. Lee, and Y. Sano: On the competition graphs of d-partial orders, *Discrete Applied Mathematics* **204** (2016) 29-37. (査読有)

S.-R. Kim, J. Y. Lee, B. Park, and Y. Sano: The competition graphs of oriented complete bipartite graphs, *Discrete Applied Mathematics* **201** (2016) 182-190. (査読有)

Y. Sano: On the rank functions of H-matroids, *Journal of Algebra Combinatorics Discrete Structures and Applications* **3(1)** (2016) 7-11. (査読有)

J. Park and Y. Sano: The double competition multigraph of a digraph, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* **17:2** (2015) 303-310. (査読有)

J. Park and Y. Sano: The double competition hypergraph of a digraph, *Discrete Applied Mathematics* **195** (2015) 110-113. (査読有)

Y. Sano: On the hypercompetition numbers of hypergraphs with maximum degree at most two, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **35** (2015) 595-598. (査読有)

A. Munemasa, Y. Sano, and T. Taniguchi: On the smallest eigenvalues of the line graphs of some trees, *Linear Algebra and its Applications* **466** (2015) 501-511. (査読有)

G. Greaves, J. Koolen, A. Munemasa, Y. Sano, and T. Taniguchi: Edge-signed graphs with

smallest eigenvalue greater than -2 , *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **110** (2015) 90-111. (査読有)

S.-R. Kim, J. Y. Lee, B. Park, and Y. Sano: A generalization of Opsut's result on the competition numbers of line graphs, *Discrete Applied Mathematics* **181** (2015) 152-159. (査読有)

[学会発表](計 10 件)

小出健人, 久野誉人, 佐野良夫: "社会的安定性を考慮した一般化安定結婚問題の効率的解法", 「日本オペレーションズ・リサーチ学会 2018 年春季研究発表会」, 2018 年 3 月 15 日-16 日, 東海大学

佐野良夫: "グラフの固有値と辺着色", 「2018 年 軽井沢グラフと解析研究集会」, 2018 年 2 月 12 日-15 日, 日本大学軽井沢研修所

佐野良夫: "グラフの最小固有値とグラフ構造", 「近畿大学数学教室講演会」, 2017 年 12 月 7 日, 近畿大学

Yoshio SANO: "Travel groupoids and combinatorial structures on a graph", 「The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (JCCA 2016)」, 2016 年 5 月 21 日-25 日, Kyoto University (京都府京都市)

佐野良夫: "トラベル・グループイドとグラフ上の組合せ構造", 「早稲田大学数学若手異分野交流会 2016」, 2016 年 2 月 29 日, 早稲田大学 (東京都新宿区)

Yoshio SANO: "On the competition numbers of diamond-free graphs", 「18th

Japan Conference on Discrete and Computational Geometry and Graphs (JCDCG² 2015)」, 2015 年 9 月 14 日-16 日, Kyoto University (京都府京都市)

佐野良夫: "ダイヤモンドを含まないグラフの競争数について", 「日本数学会 2015 年度秋季総合分科会」, 2015 年 9 月 13 日-16 日, 京都産業大学 (京都府京都市)

佐野良夫: "クローを含まないグラフの競争数について", 「組合せ論サマースクール 2015」, 2015 年 9 月 3 日-6 日, 群馬県渋川市

佐野良夫: "ダイヤモンドを含まないグラフの競争数について", 「組合せ論サマースクール 2015」, 2015 年 9 月 3 日-6 日, 群馬県渋川市

Yoshio SANO: "Fat Hoffman graphs with smallest eigenvalue at least $-2.481194304092\dots$ ", 「The 9th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications」, 2015 年 6 月 2 日-5 日, 九州大学西新プラザ (福岡県福岡市)

[その他]
ホームページ等

<https://researchmap.jp/sano/>
<http://syou.cs.tsukuba.ac.jp/sano/index.html>

6. 研究組織
(1) 研究代表者

佐野 良夫 (SANO, Yoshio)
筑波大学・システム情報系・准教授
研究者番号: 20650261