

平成 30 年 6 月 19 日現在

機関番号：13902

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K21075

研究課題名(和文)代数的組合せ論を用いたアダマール行列の研究

研究課題名(英文)Study on Hadamard matrices based on algebraic combinatorics

研究代表者

須田 庄(Suda, Sho)

愛知教育大学・教育学部・講師

研究者番号：30710206

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：アダマール行列に付随する組合せ構造を代数的組合せ論の観点から研究を行った。Linked systems of symmetric group divisible designsやunbiased orthogonal designsの概念の提唱により、従来の研究に対する統一的な手法を確立した。また、有限体から得られる一般化アダマール行列に付随するアソシエーションスキームを多数構成した。

研究成果の概要(英文)：I have studied combinatorial structures related to Hadamard matrices. By introducing the concepts of linked systems of symmetric group divisible designs and unbiased orthogonal designs, unifying methods to study the previous works are developed. Moreover, association schemes based on finite fields are constructed.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：アダマール行列 アソシエーションスキーム mutually unbiased base

1. 研究開始当初の背景

アダマール行列に付随する組合せ構造の研究は、ブロックデザインや差集合、強正則グラフや距離正則グラフといったアソシエーションスキームなど様々な観点から行われている。

近年、量子情報理論で登場する複数個のアダマール行列で定義される mutually unbiased bases(以降、MUB と記す)の組合せ論的な研究が国内外を問わず盛んになっている。特に2008年の Martin 達による、実ユークリッド空間の MUB とあるクラスのアソシエーションスキームの同値性の研究を発端として、代数的組合せ論との関連が高まっている。

2. 研究の目的

本研究の目的は代数的組合せ論の観点からアダマール行列に付随する組合せ構造の解明である。特に複数個のアダマール行列を用いて定義される MUB の構造解析およびその一般化である mutually unbiased weighing matrices(以降、MUWM と記す)の系統的な構成を行う。

3. 研究の方法

計算機を用いた具体例の計算や分類を行い、そこから一般的な理論へ昇華する内容を共同研究者の University of Lethbridge の Hadi Kharaghani 氏とメールや相互に訪問することで研究打ち合わせを行う。

4. 研究成果

本研究の研究成果は主に次の3つに分けられる:

- (1)アダマール行列を用いて得られるアソシエーションスキームの研究、
- (2)MUWM の研究、
- (3)アダマール行列に関連する有向グラフの研究。

(1)Hadi Kharaghani 氏との共同研究において、mutually suitable Latin squares とアダマール行列および有限体に付随する一般化アダマール

行列を用いて様々なアソシエーションスキームの構成を行った。

Kharaghani 氏と Sasani 氏との共同研究では実 MUB を構成するアダマール行列が Bush-type となると、アソシエーションスキームによる特徴づけを行った。これは、2008 年の Martin 達による結果の fission scheme に関する結果であり、特筆する結果である。

更に Kharaghani 氏と Holzman 氏との共同研究において正規化されたアダマール行列の auxiliary matrices を用いたアソシエーションスキームの研究と上記の研究成果は、その後、「Linked systems of symmetric group divisible designs」という概念への提唱とつながり、より一般的な枠組みで捉えることができた。これは Martin 達による MUB の結果を含む形で、アソシエーションスキームによる特徴づけを行った。

(2)アダマール行列の一般化である orthogonal design に対して、unbiased を定式化し、MUB や MUWM に関して統一的な研究を行った。種々の構成方法を orthogonal design の範疇で統一的に捉え直し、また unbiased orthogonal designs から MUB や MUWM が得られることを示した。

Seberry による orthogonal design を用いたアダマール行列の漸近的な存在性の結果は、Paley matrices を用いた plug-in method によるものである。この結果を unbiased orthogonal designs に適用することで、MUWM の無限系列の構成に成功した。

(3)アダマール行列の特別なクラスである歪対称アダマール行列には重正則トーナメントと呼ばれる、ある有向グラフが付随する。

トーナメントから定まる Seidel 行列に対して、最大の行列式を持つトーナメントの研究を Nanyang Technological Univeristy の Gary Greaves 氏と共同研究を行った。その結果、行列のサイズに応じて、最大の行列式を持つトーナメントの特徴づけを行った。

熊本大の粕原氏と、有向グラフの推移的部分グラフの位数の上界を有向グラフの Seidel 行列の固有値、固有空間の情報で与えた。これは、1986 年の Tabib による結果の一般化となっている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 13 件)

1. Hadi Kharaghani, Sho Suda, Non-commutative association schemes and their fusion association schemes, *Finite Fields Appl.* 52 (2018), 108-125, 査読あり.
2. Kai Fender, Hadi Kharaghani, Sho Suda, On a class of quaternary complex Hadamard matrices, *Discrete Math.* 341 (2018), 421-426, 査読あり.
3. Hadi Kharaghani, Sho Suda, Unbiased orthogonal designs, *Des. Codes Cryptogr.* 86 (2018), 1573-1588, 査読あり.
4. Hadi Kharaghani, Sara Sasani, Sho Suda, Strongly regular decompositions and symmetric association schemes of a power of two, *Finite Fields Appl.* 48 (2017), 356-370, 査読あり.
5. Sho Suda, Hajime Tanaka, Norihide Tokushige, A semidefinite programming approach to a cross-intersection problem with measures, *Math. Program.* 166 (2017), no. 1-2, Ser. A, 113-130, 査読あり.
6. Gary Greaves, Sho Suda, Symmetric and skew-symmetric $\{1, -1\}$ -matrices with large determinants, *J. Combin. Des.* 25, 11 (2017), 507-522, 査読あり.
7. Koji Momihara, Sho Suda, Upper bounds on the size of transitive subtournaments in digraphs, *Linear Algebra Appl.* 530 (2017), 230-243, 査読あり.
8. Hadi Kharaghani, Sho Suda, Linked systems of symmetric group divisible designs, *J. Algebraic Combin.* 47 (2017), no. 2, 319-343, 査読あり.
9. Koji Momihara, Sho Suda, Conference matrices with maximum excess and two-intersection sets, *Integers* 17 (2017), Paper No. A30, 15pp, 査読あり.
10. Hadi Kharaghani, Sho Suda, Hoffman's clique bound for normal regular digraphs, and nonsymmetric association schemes, *Mathematics Across Contemporary Sciences*, 137-150, Springer Proc. Math. Stat., 190, Springer, Cham, 2017, 査読あり.

11. Hiroshi Nozaki, Sho Suda, Complex spherical codes with two inner products, *European J. Combin.* 51 (2016), 511-518, 査読あり.
12. Hadi Kharaghani, Sho Suda, Symmetric Bush-type generalized Hadamard matrices and association schemes, *Finite Fields Appl.* 37 (2016), 72-84, 査読あり.
13. Hadi Kharaghani, Sara Sasani, Sho Suda, Mutually unbiased Bush-type Hadamard matrices and association schemes, *Electron. J. Combin.* 22 (2015), Paper 3.10, 11 pp, 査読あり.

[学会発表](計 9 件)

1. Sho Suda, On the Smith normal form of a skew-symmetric D-optimal design of order $n \equiv 2 \pmod{4}$, 日本数学会 応用数学分科会, 2018 年.
2. Sho Suda, On the Smith normal form of a skew-symmetric D-optimal design of order $n \equiv 2 \pmod{4}$, International Workshop on Bannai-Ito Theory, Zhejiang University, 2017.
3. Sho Suda, Skew-symmetric EW matrices and tournaments, Japan Conference on Combinatorics and its Applications (JCCA-2017), Kumamoto University, 2017 年.
4. Sho Suda, Skew-symmetric EW matrices and tournaments, Special Western Canada Linear Algebra meeting, BIRS Workshop, Banff, 2017 年.
5. Sho Suda, Association schemes obtained from twin prime powers, Japan-Korea Conference on Algebra and Combinatorics, Kumamoto University, 2017 年.
6. Sho Suda, Association schemes obtained from twin prime powers, 40-th Australian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, The University of Newcastle, 2016 年.
7. Sho Suda, Affine resolvable designs and an extension of linked symmetric designs, International Workshop on Algebraic Combinatorics, Anhui University, 2016 年.
8. Sho Suda, Linked systems of symmetric group divisible designs, Canadian Mathematical Society summer meeting; Algebraic Design Theory, Alberta University, 2016 年.
9. Sho Suda, Unbiased orthogonal designs, JCCA 2016: The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications, 京都大学, 2016 年.

6. 研究組織

(1)研究代表者

須田 庄 (SUDA, Sho)

愛知教育大学・教育学部・講師
研究者番号：30710206