

令和 元年 5 月 16 日現在

機関番号：10101

研究種目：国際共同研究加速基金（国際共同研究強化）

研究期間：2016～2018

課題番号：15KK0144

研究課題名（和文）超平面配置や二次曲線配置の実構造を使った研究（国際共同研究強化）

研究課題名（英文）Arrangements of hyperplanes and conics via real structures(Fostering Joint International Research)

研究代表者

吉永 正彦 (Yoshinaga, Masahiko)

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：90467647

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 10,900,000円

渡航期間： 13ヶ月

研究成果の概要（和文）：超平面配置は様々な分野に現れる共通の構造である。とりわけ、その共通部分たちから定まる部分集合のなすポセット、格子点や実構造など様々な「離散的構造」が自然に定まり、それらと幾何学的な構造との関係を探ることが中心テーマである。本研究では、超平面配置補集合のねじれコホモロジー、ミルナーファイバーに関する新たな知見が得られた。特に長年不明であった、1次のホモロジーがねじれを含むミルナーファイバーの例が見つかった。また、可換リー群Gに対して、G-Tutte多項式という多項式を導入し、既存のTutte多項式、算術Tutte多項式などを統一的に扱う枠組みを構築した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

離散的な構造を使うことで、幾何学的な構造（図形の形）を扱う新しい手法が得られた。特に今回見つかった $20 \cdot 12$ 面体配置は、非常に対称性が高いのみならず、これまで予想されていなかった性質を有しており、今後超平面配置の位相的構造を調べる際には、 $20 \cdot 12$ 面体配置の分析が重要な役割を果たすと思われる。数え上げ理論と関連して、G-Tutte多項式というものを導入し、基礎的な研究を行った。Tutte多項式はもともとグラフに対して定義され、結び目理論、統計物理などとも密接に関係している。Tutte多項式の様々な一般化を統一するG-Tutte多項式の、既存の結果との類似点や相違点が明らかになった。

研究成果の概要（英文）：Hyperplane arrangements appear in various area of mathematics. One of the peculiar points is that a hyperplane arrangement is naturally related with several "discrete structure" (e.g., intersection poset, lattice points, and real structure). The relationship between discrete structures and geometric structures of arrangements is focused in this project. We obtained several results on twisted cohomology and Milnor fibers of arrangements. In particular, we found an example (the icosidodecahedral arrangement) of 16 planes which first homology of the Milnor fiber contains a torsion. We also introduced G-Tutte polynomial for a list of integral vectors and a commutative Lie group G. G-Tutte polynomial unifies several known "generalized Tutte polynomials" and provide a common framework which enables to treat unified manner.

研究分野：数学

キーワード：超平面配置

1. 研究開始当初の背景

超平面配置は組合せ論、位相幾何、代数幾何など様々な分野に現れる共通の構造であり、その研究は様々な分野に密接に関係している。超平面配置の大きな特徴は、それが様々な「離散構造」を自然に定めることである。例えば、

- (a) 超平面たちの共通部分たちが定める交叉半順序集合またはマトロイド。
- (b) 実数体上定義されている超平面配置の stratification から定まる有向マトロイド。
- (c) 有理数体上定義されている超平面配置の部屋(Chamber) の格子点の集合。
- (d) 補集合のアメーバやコアメーバ、およびその極限であるトロピカル多様体。

などである。超平面配置に関連する様々な問題を、これらの離散構造を介して理解することが主要テーマである。複素超平面配置の位相的構造と離散的構造の関係は古くから研究され、1970年代に Deligne による単体的配置の補集合の高次のホモトピー群の消滅、Orlik-Solomon による、複素超平面配置の補集合のコホモロジー環の交差半順序集合を使った記述以降、多くの研究がなされてきた。一方、超平面配置の補集合の基本群が交差半順序集合だけでは決定できないことが、Rybnikov(1996)によって明らかにされ、コホモロジー環と基本群などホモトピー型に関する不変量の間でどこまで交差半順序集合の構造から組み合わせ論的に決定できるかというのは、多くの研究者の努力にもかかわらず、まだ明らかにはなっていない。特に超平面配置のミルナーファイバーのコホモロジーは詳細に研究され、Denham-Suciu により、高次のホモロジーがねじれを持ち得ることが示され、高次のコホモロジーを組み合わせ論的構造だけで決定するのは難しいだろうと考えられるようになっていた。一方で、1次のコホモロジーに関しては、Papadima-Suciu (2017) が、有限体上の青本複体という、純粋に組み合わせ論的に記述可能な複体を使って記述できるのでは、という美しいプログラムを提唱し、実際部分的には成功をおさめていた。

これらとは別系統の研究の背景として、2000年頃、Dimca-Papadima, Randell 等によって、超平面配置の補集合の「極小性」という性質が示された。これは超平面配置補集合が、著しく枚数の少ない CW 複体とホモトピー同値になるという結果である。研究代表者はこれまで、極小 CW 複体の構造を理解することを通して、位相的問題に応用するという研究を行ってきた。上記のミルナーファイバーのコホモロジーの記述にも応用を持ち、Papadima-Suciu が 2017年にミルナーファイバーの1次のコホモロジーのモノドロミー固有空間分解に関する予想を述べる際にも、予想をサポートする結果が得られていた。

超平面配置の補集合の位相的構造、特に Betti 数を決定するうえで、「有限体法」と呼ばれる方法がある。これは超平面配置を mod p したうえで補集合の点の数えることで、Betti 数を係数とする特性多項式を求める方法である。この方面の一番一般的な結果は、紙屋-竹村-寺尾による「特性準多項式」の概念である。特性準多項式は、ある種の多項式のリストであり、その中の一番目のものがベッチ数を係数に持つ特性多項式であることが知られており、その意味で特性準多項式は特性多項式の精密化であることがわかっていった。しかしながら特性多項式の重要性に比して、特性準多項式の概念は、まだ十分に理解されたとは言えない状況であった。特性準多項式は多面体の格子点に関する Ehrhart 理論との関係も深く、数え上げ問題で重要な役割を果たすので、その理解は重要な課題であった。

2. 研究の目的

本研究では、上記のように離散構造と位相的構造の関係をよりよく理解することで、数え上げ組合せ論や位相幾何的問題への応用を行うことを目的としている。具体的な対象としては、超平面配置のミルナーファイバーの1次のコホモロジーとモノドロミー固有空間分解の組み合わせ論的記述、特性準多項式と Ehrhart 理論の関係を明らかにすることで、数え上げ組合せ論、位相幾何の双方の未解決問題に貢献できるような理論を構築することである。

3. 研究の方法

研究代表者は、これまで独自の実構造を使った方法でミルナーファイバーの研究を行ってきたおり、これまでの研究を発展させることで組み合わせ論的構造の研究を行う。このテーマでは、ミルナーファイバーの高次のホモロジー、コホモロジーに関しては既に Denham-Suciu により、多くのねじれが現れることが示されており、これらを完全に組み合わせ論的構造だけで記述することを目指すのは現実的でないと考えられている。一方、Papadima-Suciu により、1次の Betti 数については、有限体係数の青本複体を使って統制可能であろうという予想があり、この予想の検証が最重要課題である。研究代表者は、これまでモノドロミー固有空間分解と、青本複体のコホモロジーを実構造を使って計算する類似性の高いアルゴリズムを考案しており、これらのアルゴリズムの比較をすることで、Papadima-Suciu の予想にアプローチする。特性準多項式と Ehrhart 理論の関係を深く理解するためのアイデアとして、両者を代数的トーラスの torsion point の数え上げと解釈することで、新たな家計を明らかにし、最近活発に研究されている、トロピカル幾何との関係も見据えて、トーラス内の部分集合の配置や stratification の組み合わせ論的構造を記述する。

4. 研究成果

超平面配置の位相幾何的側面に関しては、大きく分けて二つの成果が得られた。一つ目は、1次のねじれ係数コホモロジーの消滅に関する研究成果である。一時のねじれコホモロジーの消滅が起こるための条件に関しては多くの研究がなされているが、その中で研究代表者による、実構造を使った以前の結果があった。このとき実構造を使ったのは、純粋に証明に使える技術の限界であり、実構造を使わない形に一般化することは、数年前から Alexandru Dimca 氏との共通の目標であった。研究代表者の Bremen 大学滞在中に、Dimca 氏、Bailet 氏 (Bremen 大学ポスドク) との共同作業により、研究を完成させた。この成果は、[5]として出版した。もう一つは、研究期間の終盤である 2019 年 1 月に得られた、ミルナーファイバーの mod 2 ベッチ数とねじれに関する成果である。上述の「研究方法」の方針で、二種類のアルゴリズムを詳細に比較し、「ずれ」が起こる可能性を精査している際に、16 枚の平面からなる 3 次元空間内の配置で以下の特筆すべき性質を持った例が見つかった。

(a) ミルナーファイバーの 1 次のホモロジーが 2-torsion を持つ。

(b) Papadima-Suciu の予想の一部が成立していない。

これらのうち(a)は 2003 年に Cohen-Denham-Suciu 等の仕事以降長らく不明であった 1 次のホモロジーがねじれを持つ最初の例である。さらに(b)は、ここ数年本テーマの研究をリードしてきた Papadima-Suciu のプログラムの根本的な修正を迫るもので、今後の当該研究テーマの推進に大きな影響を与える例である。この配置は非常に対称性が高く、正 20 面体と正 12 面体の共通の切頂多面体である、20・12 面体と関係しているため、20・12 面体配置(Icosidodecahedral arrangement)と名付け、3月にベトナムのハノイで行われた Workshop において口頭で発表した。この例の分析の過程で、複素超平面配置補集合の二重被覆の mod 2 Betti 数が組み合わせ論的に決定できるという一般的な結果が得られた。

特性準多項式や Ehrhart 理論に関しては、数年前からの継続中であった、ルート系に付随した Linial 配置と呼ばれる超平面配置の特性多項式に関する研究の投稿と出版が完了した([3][4])。この研究で、特性多項式そのものよりも、その精密化である特性準多項式を考えることで初めて見えてくる構造(オイラー多項式によるシフトと Ehrhart 準多項式の関係)があり、重要な知見であると思われる。特性準多項式の「成分」である多項式の一つが、Moci 氏らによって導入された算術 Tutte 多項式と関係しているようだ、という観察が何人かの専門家の間でなされており、大学院生の Tan Nhat Tran 氏とポスドク(現・Xi'an Jiaotong-Liverpool University, 中国)との共同研究を始めた。算術 Tutte 多項式の定義の中で、有限アーベル群の位数を数えて足し上げる部分があるのだが、幾何学的には有限アーベル群の Pontrjagin 双対(S^1 への準同型)の個数を数えていると考えるほうが自然である、というアイデアに基づいて、可換 Lie 群への写像の数え上げを使って、G-Tutte 多項式を導入した。この多項式は、群 G を特別なものにする事で、古典的な Tutte 多項式、算術 Tutte 多項式、特性準多項式の成分を再現できるという意味で、多くの「一般化された Tutte 多項式」を統一する概念となっており、数え上げ、G-配置の補集合のオイラー標数やポアンカレ多項式などに関する多くの結果が得られた。この成果は論文[1]として投稿、アクセプト済みである。なお、この論文の時点では、特性準多項式の各成分をポセットの特性多項式として表示することができるか、という自然な問題が残っていたが、T. N. Tran 氏との共同研究[2]で、トーラス配置から得られる部分トーラスたちのうち、特定の torsion point を含むトーラスたちのなすポセットの特性多項式、という形で完全に組み合わせ論的な記述を与えることに成功した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 5 件)

[1] Y. Liu, T. N. Tran, M. Yoshinaga, G-Tutte polynomials and abelian Lie group arrangements. to appear in Int. Math. Res. Notices 2019. 査読有, DOI: 10.1093/imrn/rnz092

[2] T. N. Tran, M. Yoshinaga, Combinatorics of certain abelian Lie group arrangements and chromatic quasi-polynomials. Journal of Combinatorial Theory, Series A 165 (2019) 258-272. 査読有, <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2019.02.003>

[3] M. Yoshinaga, Worpitzky partitions for root systems and characteristic quasi-polynomials. Tohoku Math. J. 70 (2018) 39-63. 査読有, doi:10.2748/tmj/1520564418

[4] M. Yoshinaga, Characteristic polynomials of Linial arrangements for exceptional root systems. Journal of Combinatorial Theory, Series A 157 (2018) 267-286. 査読有, <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2018.02.011>

[5] P. Bailet, A. Dimca, M. Yoshinaga, A vanishing result for the first twisted cohomology of affine varieties and applications to line arrangements. manuscripta mathematica 157 (2018), no. 3-4, 497-511. 査読有, <https://doi.org/10.1007/s00229-018-0999-y>

[学会発表](計 24 件)

[1] M. Yoshinaga, Double coverings of arrangement complement and 2-torsion in Milnor fiber homology. Workshop in CIMPA - IMH Research School, HYPERPLANE ARRANGEMENTS: RECENT

- ADVANCES AND OPEN PROBLEMS, Hanoi, March 21 - 22, 2019.
- [2] M. Yoshinaga, Matroids, Tutte polynomial, and generalizations (3 hours lectures). Free divisor and hyperplane arrangements, in Paris, 17-19 Dec. 2018.
 - [3] 吉永正彦, 超平面配置と特性準多項式, 名古屋工業大学談話会, 2018年12月6日.
 - [4] M. Yoshinaga, G-Tutte polynomials and abelian Lie group arrangements. The 6th Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities, Nha Trang (Vietnam) 17 Sep. 2018.
 - [5] M. Yoshinaga, Introduction to Catalan arrangements. (3 hours lectures) SUMMER SCHOOL - NEW PERSPECTIVES IN HYPERPLANE ARRANGEMENTS, Bochum University, 10-13 September 2018
 - [6] 吉永正彦, 特性多項式の零点分布から Tutte 多項式の一般化へ. 数学教室談話会, 北海道大学, 2018年7月18日.
 - [7] M. Yoshinaga, Tutte polynomials in Geometry and Combinatorics (2 hours), Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2018, Hiroshima University 2018年3月6日, 7日.
 - [8] M. Yoshinaga, How many homomorphisms are expected? A motivation for G-Tutte polynomials. 2018年2月1日. A walk between hyperplane arrangements, computer algebra and algorithms. Hokkaido University.
 - [9] 吉永正彦, A 型 Catalan 配置の対数的ベクトル場の基底. 北海道特殊関数セミナー. 2017年12月1日, 北海道大学
 - [10] 吉永正彦, Catalan 配置と原始差分, 研究集会「不変式・超平面配置と平坦構造」, 2017年11月10日
 - [11] 吉永正彦, ルート系の Liniar 配置と特性準多項式. 表現論と組合せ論(2017年度 RIMS 研究集会), 2017年10月12日, RIMS.
 - [12] M. Yoshinaga, G-Tutte polynomials. Matroids over Hyperfields. August 28 2017, Fribourg (Switzerland).
 - [13] M. Yoshinaga, G-Tutte polynomials. Advances in Hyperplane Arrangements. 16 August 2017, Bremen.
 - [14] M. Yoshinaga, Remarks on characteristic quasi-polynomials of deformed Weyl arrangements. Mathematical Congress of the Americas 2017, Session ``Advances in Arrangement Theory'', Montreal, Canada, 25 July, 2017.
 - [15] M. Yoshinaga, \mathbb{G} -Tutte polynomials and abelian Lie group arrangements. Bremen, Oberseminar, 19 July 2017.
 - [16] M. Yoshinaga, G-Tutte polynomials. Encounter in Topology 'n Algebra (ET'nA 2017), Scuola Superiore di Catania, Catania, Italy, 2. June 2017.
 - [17] M. Yoshinaga, Characteristic polynomials of Liniar arrangements. Oberseminar Lie Theorie, University of Bochum, 8 May 2017.
 - [18] M. Yoshinaga, Characteristic polynomials of Liniar arrangements. Mathematics and String Theory Seminar, Kavli IPMU, 16 February 2017.
 - [19] M. Yoshinaga, The characteristic polynomial of Liniar arrangement. Oberseminar zur Algebra und Algebraischen Kombinatorik, Hannover, 18 January 2017.
 - [20] M. Yoshinaga, Characteristic polynomials of hyperplane arrangements. Colloquium, Fribourg University (Switzerland), 22 November 2016.
 - [21] M. Yoshinaga, What makes roots lying on a line? Combinatorial Structures in Algebra, Geometry and Topology. 31 October 2016, Bremen University.
 - [22] M. Yoshinaga, The Euler characteristic reciprocity for order polynomials, Enumerative, algebraic and geometric aspects of arrangements, Bremen University (Germany), 25 August 2016
 - [23] M. Yoshinaga, Hyperplane arrangements and the Eulerian polynomial. Summer Conference on Hyperplane Arrangements (SCHA) in Sapporo, 8 August 2016.
 - [24] M. Yoshinaga, Liniar arrangements and Eulerian polynomials, 24 May 2016, Kyoto, Minisymposium ``Combinatorics of hyperplane arrangements'', (JCCA 2016).

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：

出願年：
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~yoshinaga/jindex.html>

6．研究組織

〔主たる渡航先の主たる海外共同研究者〕

研究協力者氏名：エヴァ・マリア・ファヒトナー

ローマ字氏名：Eva Maria Feichtner

所属研究機関名：Bremen 大学

部局名：数学科

職名：教授

〔その他の研究協力者〕

研究協力者氏名：アレクサンドル・ディムカ

ローマ字氏名：Alexandru Dimca

研究協力者氏名：ポリーン・バイレ

ローマ字氏名：Pauline Bailet

研究協力者氏名：劉 曄

ローマ字氏名：Ye Liu

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。