

令和 元年 5 月 26 日現在

機関番号：12601

研究種目：国際共同研究加速基金（国際共同研究強化）

研究期間：2016～2018

課題番号：15KK0152

研究課題名（和文）F特異点と標数0の双有理幾何学に現れる特異点（国際共同研究強化）

研究課題名（英文）F-singularities and singularities in birational geometry in characteristic zero  
(Fostering Joint International Research)

研究代表者

高木 俊輔 (Takagi, Shunsuke)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：40380670

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 8,700,000円

渡航期間： 6ヶ月

研究成果の概要（和文）：標数 $p$ への還元がほとんどすべての $p$ に関して大域的F正則多様体になるような、標数0の代数閉体上定義された射影代数多様体を大域的F正則型多様体という。Paolo Casciniとの共同研究において、「大域的F正則型多様体はFano型多様体である」というKarl SchwedeとKaren E. Smithの予想に取り組んだ。そして、反標準因子がネフであるような3次元非特異射影代数多様体に対しては、Schwede・Smithの予想が正しいことを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Schwede・Smithの予想はF特異点論と双有理幾何学を結びつける重要な予想であり、この予想が肯定的に解決されれば、F特異点論を用いたFano型多様体の研究が可能になる。Schwede・Smithの予想は2次元の場合に正しいことが知られていたが、高次元の場合についてはほとんど何もわかっていなかった。今回初めて3次元の結果が得られたが、これをきっかけに高次元の研究が加速することが期待される。

研究成果の概要（英文）：A projective variety over an algebraically closed field of characteristic zero is said to be of globally F-regular type if its modulo  $p$  reduction is globally F-regular for almost all  $p$ . In joint work with Paolo Cascini, we discuss a conjecture of Karl Schwede and Karen Smith, which says that a projective variety of globally F-regular type is of Fano type. In particular, we prove that their conjecture holds if the variety is a 3-dimensional smooth projective variety with nef anti-canonical divisor.

研究分野：代数幾何学

キーワード：F特異点 大域的F正則多様体 Fano型多様体 判定イデアル 数値的Q-Gorenstein

## 様式 F - 19 - 2

### 1. 研究開始当初の背景

F 正則特異点は 1980 年代から研究されてきた、古典的な F 特異点の一種である。Karen Smith、原伸生、V.B.Mehta・V.Srinivas の結果から、標数 0 の Q-Gorenstein 正規特異点が大域的 F 正則特異点であること、十分大きい標数  $p \rightarrow \infty$  で還元が F 正則特異点であることは同値であることが知られている。F 正則特異点を定義する上で Q-Gorenstein 性は必要ないが、(古典的) 対数的末端特異点の定義には Q-Gorenstein 性が必要である。しかし、近年中山昇や Tommaso de Fernex・Christopher Hacon 等によって、Q-Gorenstein とは限らない正規特異点に対して対数的末端特異点の定義が拡張された。この拡張された対数的末端特異点を考えることで、上述の同値性が Q-Gorenstein とは限らない正規特異点に対しても成り立つのではないかと予想されている(以下、予想 A と記す)。2 次元対数的末端(もしくは F 正則)特異点は Q-Gorenstein であるため、予想 A が非自明なのは 3 次元以上の場合だが、現在のところ 3 次元の場合ですら未解決である。

Q-Gorenstein 性よりも少し弱い条件として、数値的 Q-Gorenstein 性と呼ばれる概念が最近 Sebastien Boucksom、de Fernex、Charles Favre、Stefano Urbinati によって導入された。de Fernex、Roi Docampo、Kevin Tucker との共同研究において研究代表者は、「特異点が大域的 Q-Gorenstein ならば、予想 A は正しい」ことを証明した。また特異点が射影代数多様体のアフィン錘である場合は、Karl Schwede・Karen Smith の「Fano 型多様体と、十分大きい標数  $p \rightarrow \infty$  で還元が大域的 F 正則多様体であることは同値である」という予想から、予想 A が導かれることが知られている。以下、十分大きい標数  $p \rightarrow \infty$  で還元が大域的 F 正則多様体であるような、標数 0 の代数閉体上定義された多様体を大域的 F 正則型多様体という。

### 2. 研究の目的

特異点が射影代数多様体のアフィン錘である場合に予想 A を解決すべく、Schwede・Smith の予想に取り組むことが本研究課題の主目的である。「Fano 型多様体ならば、大域的 F 正則型多様体である」ことは Schwede・Smith によって証明されているため、逆を示したい。2 次元の場合は大川新之介によって最初に証明され、その後程なくして権業善範と研究代表者、DongSeon Hwang・Jinhyung Park によって独立に別証明が与えられた。権業・高木、Hwang・Park の証明は Zariski 分解を用いるものであるのに対し、大川の証明は混標数の底空間上の変形理論を駆使するものであった。Zariski 分解の高次元化は代数幾何学における重要な問題であり、因子的 Zariski 分解など幾つかの理論があるものの、Schwede・Smith の予想を解決するには不十分である。そこで大川の議論に着目し、変形理論を用いて Schwede・Smith の予想の 3 次元の場合を証明することを目指す。

また特異点が大域的 Q-Gorenstein ならば予想 A は正しいことから、「数値的 Q-Gorenstein 性を仮定すれば、F 特異点論の他の予想も正しいことが証明できるのではないかと期待できる。この期待を裏付ける根拠を得るために、判定イデアルに関する未解決問題に挑戦する。

### 3. 研究の方法

Schwede・Smith の予想に関しては、大川の議論を精査し、その高次元化を試みる。大川の議論は一部理解が難しいところがあるため、まずはそれを分かりやすい形に翻訳したい。大川の議論から、「標数 0 の 2 次元射影代数多様体  $X$  のある 1 つの  $p$  への還元が大域的 F 正則ならば、 $X$  は Fano 型多様体である」という主張(以下、主張 B と記す)が導かれる。そこで大川の議論を理解するために、主張 B の局所版である「標数 0 の 2 次元正規特異点  $(X, x)$  のある 1 つの  $p$  への還元が F 正則ならば、 $(X, x)$  は対数的末端特異点である」という主張(以下、主張 C と記す)の直接的な証明を与えることを目指す。

判定イデアルは密着閉包の理論に由来する正標数のイデアルで、有限判定イデアルと巨大判定イデアルの 2 種類がある。両者は一致すると予想されているが、一般には未解決である。I.Aberbach・B.MacCrimmon、原、Smith らによって、Q-Gorenstein の場合には正しいことが知られている。de Fernex、Docampo、Tucker との共同研究において培ったテクニックを用いて、その証明を数値的 Q-Gorenstein の場合に拡張することを目指す。

### 4. 研究成果

主張 C について Paolo Cascini 氏、田中公氏と議論したところ、3 次元で反例を構成することに成功した。このことから、大川の議論は 2 次元特有のものであり、その高次元化は難しいことがわかった。そこで方針を変更し、森夢空間の場合の証明を参考することにした。数年前、権業・大川・三内顕義との共同研究において、 $X$  が森夢空間ならば Schwede・Smith の予想が正しいことを証明した。その証明では、反標準因子に関して極小モデルプログラム(MMP)を走らせることによって、反標準因子がネフの場合に帰着させるのがキーであった。森夢空間上のネフ因子は半豊富なので、反標準因子が半豊富の場合を考えればよいことになり、この場合の Schwede・Smith の予想は標準的な議論から導かれる。森夢空間でない場合には、反標準因子に関して MMP を走らせることはできないし、ネフ因子も半豊富とは限らないが、Schwede・Smith

の予想へのアプローチの第一段階として、反標準因子がネフの場合を考えるのは自然なことだと思われる。このアプローチに関して Cascini 氏と議論を重ねた結果、「反標準因子がネフであるような 3 次元非特異大域的 F 正則型多様体は、弱 Fano 多様体である」ことを証明することに成功した。この結果に関する論文は現在準備中である。

また数値的 Q-Gorenstein 多様体の場合に、有限判定イデアルと巨大判定イデアルが一致することを証明した。数値的 Q-Gorenstein 性も密着閉包も付置論的な特徴付けが存在する。この特徴付けと、MacCrimmon と L.J.Williams による有限密着閉包と巨大密着閉包の比較に関する議論を組み合わせることで、2 つの判定イデアルが一致することが導かれる。

さらに Imperial College London 滞在中、2017 年 3 月に C. Birkar 氏、権業氏、G. Rosso 氏、R. Svald 氏と共に、Cambridge 大学にて開催された研究集会「Cambridge-Tokyo Algebraic Geometry Workshop 2017」の世話人を務めた。また 2018 年 5 月に権業氏、Cascini 氏と共に、Imperial College London にて開催された研究集会「London-Tokyo Workshop In Birational Geometry」の世話人を務めた。両研究集会は、双有理幾何学の最近の進展を概観する機会を設けたというだけでなく、イギリスと日本の双有理幾何学の（若手）研究者の交流を図ることができたという点で有意義であった。特に Birkar 氏は 2018 年にフィールズ賞を受賞するなど、現在の双有理幾何学を牽引する研究者であり、このような交流の意義は非常に大きいと言える。

## 5. 主な発表論文等 (研究代表者は下線)

### [雑誌論文](計 2 件)

1. Shunsuke Takagi, Finitistic test ideals on numerically Q-Gorenstein varieties, Journal of Algebra, 査読有, In press (2019), 10.1016/j.jalgebra.2018.08.003.
2. Kenta Sato, Shunsuke Takagi, General hyperplane sections of threefolds in positive characteristic, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 査読有, In press (2019), 10.1017/S1474748018000166.

### [学会発表](計 4 件)

1. Shunsuke Takagi, General hyperplane sections of threefolds in positive characteristic, The London Geometry and Topology Seminar, Imperial College London, 2017 年 5 月 5 日.
2. Shunsuke Takagi, Vanishing theorems on globally F-regular varieties, Algebraic Geometry Seminar, University of Cambridge, 2018 年 5 月 2 日.
3. Shunsuke Takagi, General hyperplane sections of threefolds in positive characteristic, Pure Maths Colloquium, University of Sheffield, 2018 年 5 月 9 日.
4. 高木 俊輔, 代数多様体の特異点論と正標準の手法, 日本数学会 2019 年度年会, 東京工業大学, 2019 年 3 月 19 日.

### [図書](計 0 件)

### [産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年：  
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等  
<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~stakagi/>

6. 研究組織  
研究協力者  
田中 公 (TANAKA Hiromu)  
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授  
研究者番号：50724514

〔主たる渡航先の主たる海外共同研究者〕  
研究協力者氏名：Paolo Cascini  
ローマ字氏名：パオロ・カッシーニ  
所属研究機関名：Imperial College London  
部局名：Department of Mathematics  
職名：教授

〔その他の研究協力者〕  
研究協力者氏名：  
ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。