

研究種目： 基盤研究（S）  
 研究期間：2004～2008  
 課題番号： 16104002  
 研究課題名（和文） 波動場の幾何と解析  
 研究課題名（英文） Geometry and Analysis of Wave Fields

## 研究代表者

小澤 徹（OZAWA, Tohru）  
 早稲田大学・理工学術院・教授  
 研究者番号：70204196

## 研究成果の概要：

非線型波動場の数学的構造の解明を目指し、古典場と量子場に関する様々なモデルについて数学的な研究を行い、自己相似場の数学的理論、ディラック行列の表現の変換と保存量との代数的特徴付け、正準交換変換の弱ワイル表現の構成理論、散乱の順問題と逆問題について新しい理論を構築した。

## 交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2004年度	12,000,000	3,600,000	15,600,000
2005年度	13,300,000	3,990,000	17,290,000
2006年度	13,600,000	4,080,000	17,680,000
2007年度	13,800,000	4,140,000	17,940,000
2008年度	14,000,000	4,200,000	18,200,000
総計	66,700,000	20,010,000	86,710,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非線型双曲型方程式、非線型分散型方程式、散乱理論、量子場、逆問題

## 1. 研究開始当初の背景

量子化された波動場の本質を理解するには、その古典極限、即ち古典場の数学的構造を解明する事が極めて重要である。古典場の数学的理論は Segal, Jörgens 等の先駆的な仕事の現れた 1960 年代初頭に始まり、非線型シュレディンガー方程式、非線型クライン・ゴルドン方程式、ハートリー方程式、KdV 方程式等の単独スカラー場の研究については、かなり精密で深い理論を持つに至っている。

しかし、古典場と量子場双方を見渡す研究、方程式系の研究、通常の函数空間では記述不可能な場の研究、相互作用についての幾何学・代数的研究など未解決問題は数多い。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、現在迄我々がスカラー場に関して蓄積した方法論に立脚して本来の波動場の数学的構造を明らかにする事である。特に、波動型方程式に関して古典場・量子場双方の立場から、その数学的構造を研究する事を最重要課題とする。場の特異性を解消させる機構として解析的に認知されている零形式の評価や正規型の手法の幾何学的解釈、ディラック系との相互作用の問題、ディラック行列の表現と解の構造との関係を研究する。

### 3. 研究の方法

研究代表者は研究計画全般を古典場理論の立場から実行した。研究分担者新井朝雄は量子場理論の立場から、津田谷公利は古典場理論の立場から、中村玄は線型理論、逆問題、漸近解析の立場から上記研究計画の関連部分について実行した。各研究者にそれぞれ研究協力者のグループを作りグループ内での共同研究、研究打合わせを実行した。

### 4. 研究成果

**非線型波動場の研究** 質量の無い場合については特に自己相似場の存在と一意性について研究した。空間変数について球対称な自己相似場の存在を 2 次元以上の全ての次元で証明した。球対称性の仮定は 5 次元以下なら外せる事も明らかにした。時空の伸長に対して不変な形で重み付き弱ストリッカーズ評価が成立する事を初めて証明し、それを有効に用いて逐次近似法により自己相似場を大域的に構成した。質量が有る場合は未解決問題の多い空間 2 次元の基礎理論を整備した。特に線型クライン・ゴルドン方程式の末端型ストリッカーズ評価の空間 2 次元の場合を研究した。

**非線型ディラック場の研究** 三次の自己相互作用の下でのディラック場の 1+3 次元での数学的実在についての研究を行った。特に、球対称な  $H^1$  データによるディラック場の時空大域的存在を数学的に証明し、一方、ディラック行列の表現の変換と保存量の関係についても研究し、特定のディラック行列の表現に依存していたチャダム・グラシの自由解を、ディラック行列の直交変換による表現の変換に関して共变的に記述する事に成功した。また非局所相互作用の下でのディラック場の大域的存在を証明した。

**非線型シュレディンガー場の研究** 散乱解の長時間的挙動は、短距離相互作用の下では自由解により支配されるが、相互作用の影響は高次の項に現れる。この事実は小さなデータの枠組で空間 1 次元でのみ指摘されていた。本研究では、それを 5 次元まで拡張し、反撥型相互作用の下では大きなデータに対しても成立する事を証明した。

**定常場** 有限なエネルギーを持った定常場の指数減衰について研究し、非線型項の影響よりも外部ポテンシャルの影響が支配的である事を証明した。更に、外部ポテンシャルの増大度が定常場の減衰度に与える影響を具体的に計算する方法を明らかにし、その減衰度が最良である

事も示した。

**量子力学や量子場の理論における時間作用素の研究** 強時間作用素のスペクトルの構造を明らかにした。与えられた任意のCCRの弱Weyl表現から別の弱Weyl表現を構成する方法を発見した。時間作用素と強時間作用素を統合する一般化された時間作用素および一般化された弱Weyl表現の概念を提出し、量子場の理論への応用も行った。

**Dirac型作用素の研究** 非相対論的極限において、非相対論的量子電磁力学におけるスピントきのPauli-Fierzモデルに収束することを示した。

**量子場のモデルの研究** 一般化されたスピノソンモデルにおける基底状態が存在しない条件を定式化した。

**境界値逆問題の研究** 境界における多重回数計測データ(即ち多重個のコーシーデータ)より媒質の未知不連続性の同定手続きとして知られるprobe methodとenclosure methodの改良と完成を目指した。2次元等方均質導電対中の非凸多角形状の未知空洞同定逆問題に対する再構成手続きが、2回の境界観測で可能なことを示した。

**散乱の逆問題の研究** 各方向から入射した平面波に対する散乱波の遠方場を観測して、未知障害物の境界を求める手続きについてこれまでに知られているいくつかの有名な方法の間の関係について研究した。これらがno-response testを改良することにより統合出来る事を示した。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 103 件)

1. T. Ozawa, K. Yamauchi, Remarks on analytic smoothing effect for the Schrödinger equation, Math. Z., 261 (2009), 511-524, 査読有.
2. R. Carles, T. Ozawa, A Poisson formula for the Schrödinger operator, J. Fourier Anal. Appl., 14 (2008), 475-483, 査読有.
3. R. Carles, T. Ozawa, On the wave operators for the critical nonlinear Schrödinger equation, Math. Res. Lett., 15 (2008), 185-195, 査読有.

4. Y. Cho, T. Ozawa, On small amplitude solutions to the generalized Boussinesq equations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 17 (2007), 691-711, 査読有.
5. J. Kato, M. Nakamura, T. Ozawa, A generalization of the weighted Strichartz estimates for the wave equations and an application to self-similar solutions, *Commun. Pure Appl. Math.*, 60 (2007), 164-186, 査読有.
6. A. Arai, Y. Matsuzawa, Time operators of a Hamiltonian with purely discrete spectrum, *Rev. Math. Phys.* 20(2008), 951-978, 査読有.
7. A. Arai, Non-relativistic Limit of a Dirac Polaron in Relativistic Quantum Electrodynamics, *Lett. Math. Phys.* 77 (2006), 283-290, 査読有.
8. C.-L. Lin, G. Nakamura, M. Sini, Unique continuation for the elastic transversely isotropic dynamical systems and its application. *J. Differential Equations* 245 (2008), no. 10, 3008-3024, 査読有.
9. G. Nakamura, M. Watanabe, An inverse boundary value problem for a nonlinear wave equation. *Inverse Probl. Imaging* 2 (2008), no. 1, 121-131, 査読有.
10. J.J. Liu, G. Nakamura, M. Sini, Reconstruction of the shape and surface impedance from acousticscattering data for an arbitrary cylinder. *SIAM J. Appl. Math.* 67 (2007), no. 4, 1124-1146, 査読有.

[学会発表](計104件)

1. T. Ozawa, Analytic smoothing effect for the nonlinear Schrödinger equations, 大韓数学会 Global KMS 特別講演, 2008年10月24日, Korea.
2. 新井朝雄, 正準交換関係の非ヴァイル型表現と時間作用素の理論, 日本数学会秋季分科会特別講演, 2008年9月24日, 東京工業大学.
3. 渡邊道之, 中村玄, B. Kaltenbacher, On the identification of a coefficient

function in a nonlinear wave equation, 日本数学会年会, 2008年3月23-26日, 近畿大学.

4. 小澤徹, 擬共型不変な非線型シュレディンガー方程式の波動作用素, 応用数理学会年会総合講演, 2007年9月15-17日, 北海道大学.
5. T. Ozawa, Schrödinger-improved Boussinesq system, *Asymptotic Analysis and Singularity*, MSJ-IRI, 2005年7月18-27日, 仙台.

[図書](計8件)

著書

1. 小澤徹, 東北大学大学院理学研究科, 非線形シュレディンガー方程式の散乱理論, 2008, 67pp.
2. 新井朝雄, 共立出版, 量子統計力学の数理, 2008, 366pp.
3. 新井朝雄, 日本評論社, 物理の中の対称性, 2008, 308pp.
4. 新井朝雄, 朝倉書店, 量子現象の数理(朝倉物理学体系12), 2006, 535pp.
5. 新井朝雄, 朝倉書店, 現代物理数学ハンドブック, 2005, 707pp.

編書

1. Y. Giga, K. Ishii, T. Ozawa and N. Yamada, Gakkotosho Co.,Ltd., International Conference for the 25<sup>th</sup> Anniversary of Viscosity Solution(GAKUTO International Series. Mathematical Sciences and Applications 30), 2008, 255pp.
2. T. Ozawa, F. Planchon, P. Raphael, Y. Tsutsumi and N. Tzvetkov, Gakkotosho Co.,Ltd., Lectures on Nonlinear Dispersive Equations(GAKUTO International Series. Mathematical Sciences and Applications 27), 2006, 176pp.
3. T. Ozawa and Y. Tsutsumi, Gakkotosho Co.,Ltd., Nonlinear Dispersive Equations(GAKUTO International Series. Mathematical Sciences and Applications 26), 2006, 237pp.

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

小澤 徹 (TOHRU OZAWA)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：70204196

### (2)研究分担者

新井 朝雄(ASAO ARAI)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：80134807

中村 玄(GEN NAKAMURA)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：50118535

津田谷 公利(KIMITOSHI TSUTAYA)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：60250411

福泉 麗佳(REIKA FUKUIZUMI)

北海道大学・大学院理学研究院・助手

研究者番号：00374182