

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2004～2008

課題番号：16540187

研究課題名（和文） 周期軌道の安定化問題におけるタイムラグの影響に関する研究

研究課題名（英文） Study of influences of time-lags on a problem of stabilizing periodic orbits.

研究代表者

宮崎 倫子 (MIYAZAKI RINKO)

静岡大学・工学部・准教授

研究者番号：40244660

研究成果の概要：

自然・社会・工学における現象には周期的に変動する、あるいは変動してくれることが望ましい現象が少なからずある。一方、相互作用や反応の遅れ（タイムラグ）は、時として予測不可能な複雑な現象をもたらす。本研究では、周期的に変動する現象を実現（安定化）するために、あえてタイムラグを用いるという手法について、微分方程式により数学的手法とシミュレーションを併用することにより解析を行った。その結果、非常に限定された状況ではあるが安定化実現へのメカニズムが証明された。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2004年度	1,000,000	0	1,000,000
2005年度	1,000,000	0	1,000,000
2006年度	900,000	0	900,000
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
総計	4,500,000	480,000	4,980,000

研究分野：関数微分方程式論

科研費の分科・細目：(分科) 数学 (細目) 大域解析学

キーワード：時間遅れをもつ微分方程式、フロッケの理論、軌道安定性、Delayed Feedback 制御法

1. 研究開始当初の背景

従来、微分方程式における時間遅れ（タイムラグ）は、解の不安定性あるいは振動性をもたらすものとしてとらえられてきていた。特に、Mackey and Glass (Science, Vol. 197, 1977) によって提示された白血球の生成を示す数理モデルは、1次元自励系方程式であっても時間遅れの影響によりカオス的な解

挙動が得られる例としてよく知られている。

一方、Pyragas (Physics Letters A, Vol. 170, 1992) は時間遅れを不安定周期軌道の安定化に利用する方法を提案した。これは、Delayed Feedback 制御法（以下DF制御法と呼ぶ）として知られており、現在に至るまで様々な分野で応用されている。しかし、その多くは数値シミュレーションを用いた結

果であり、DF制御法の成否を裏付ける理論的な解析は、当時そして現在に至るまで、あまりなされておらず、数少ない解析的な結果についても、数学的には不完全さを残すものである。

研究代表者自身も、時間遅れが周期解を破壊して平衡点の安定性を導きうる (J. Math. Anal. Appl., Vol. 204, 1996) ことに着目してきており、Pyragasの研究には非常に興味を覚え、DF制御法がホップ分岐に与える影響について解析を行ってきた (RIMS 講究録, No. 13009, 2003; Nonlinear Analysis, Vol. 63, 2005)。

2. 研究の目的

Pyragasの提案したDF制御法について、以下の事柄を明らかにすることを目的とする。

- (1) 安定な周期軌道が得られる条件を提示する。
- (2) 得られた周期軌道は、もとのシステムの不安定周期軌道となっているこの証明。
- (3) 上記2つの目的を遂行するために、時間遅れをもつ微分方程式の定性的理論の整備。特に、フロッケの理論とそれに関連してモノドロミー作用素の決定方法やフロッケ乗数の算出手法を明らかにする。

3. 研究の方法

基本的には、時間遅れをもつ微分方程式の定性的解析手法を利用あるいは新たに開発して用いる。数学的解析では、困難な場合には、必要に応じて数値シミュレーションによる予測も併用する。

- (1) 分岐の種類により方程式を具体的に限定してDF制御項があたえる時間遅れの影響について数学的な解析を試みる。その際、線形化方程式の特性根の解析が重要となる。
- (2) 一般的にDF制御項を持つ非線形微分方程式の周期軌道の周りでの変分方程式に対する解析を試みる。これは、時間遅れをもつ周期系の微分方程式となり、時間遅れのない微分方程式に対するフロッケの理論と同様の理論を必要とする。これらには、Stokesの2つの結果 (PNAS, Vol. 48, 1962; Cont. Diff. Eq., Vol. 3, 1964) が有効であると考えられる。しかし、かなり古い結果でもあり、その内容を最新成果も取り込み再考する必要がある。
- (3) 数値シミュレーションの併用。特に、

PyragasがDF制御を提案する際に用いたRossler方程式に対するDF制御について、様々な角度からの数値計算を実行する。そのためには、精度の良い数値計算アルゴリズムの開発や、計算スキームの確立も必要である。

4. 研究成果

本研究における主な成果は以下のとおりである。

- (1) DF制御法による周期軌道の安定化問題において、フィードバックゲイン行列として安定化したい周期軌道周りのヤコビ行列と可換性をもつような行列を採用した場合について、解析的な結果が得られた。具体的には、制御前の変分方程式のフロッケ乗数と制御後の変分方程式のフロッケ乗数との関係を与えることに成功した。
- (2) 特に、上記(1)において、フィードバックゲイン行列を単位行列の実数倍をとした場合について、以下の事柄について数学的証明を与えた。
 - ① 制御前の周期軌道が1より大きな(実数の)フロッケ乗数を持つ場合には、けっして安定化されない。
 - ② 制御前の周期軌道のフロッケ乗数が $-e^2$ より大きく -1 より小さい場合には、制御後のフロッケ乗数の大きさが1以下となるようなフィードバックゲインの条件を提示した。
- (3) 上記(1)と同様の設定で、制御前と制御後で非退化性が遺伝することを証明した。
- (4) 上記(3)および(4)の結果と下記(5)の数値シミュレーション手順を併用することにより、単位行列の実数倍をフィードバックゲイン行列にもつDF制御を印加したRossler方程式において、周期解が安定化されるためのゲイン係数の範囲を数値的に求めた。
- (5) DF制御法の成功を判定するための数値シミュレーション手順を新たに提示した。具体的には安定化された周期軌道の周期を求め、これが時間遅れをと一致するような場合を決定すると言うものである。

得られた成果の国内外における位置づけとインパクトは以下のとおりである。

- (1) DF制御法の応用には、ゲイン行列や時間遅れの決定の際に、従来試行錯誤が伴うものであったが、ある程度の理論的枠組みを与えたものと考えられる。
- (2) DF制御の限界として知られている奇数

条件 (Just et. al., Phys. Rev. Lett., Vol. 78, 1997; Nakajima, Phys. Lett. A, Vol. 232, 1997) に対して, 成果 (2)①はゲイン行列が単位行列の実数倍と言う限定された場合ではあるが, 「奇数」が本質ではなく, 1 より大きなフロッケ乗数であることが本質ではないかということが示唆される.

- (3) 成果(4)は, Pyragas (Phys. Lett. A, 170, 1992) が DF 制御法を提案する際に Rossler 方程式に採用したゲイン行列とは異なる行列ではある. にもかかわらず, このとき得られた安定な周期軌道が, Pyragas のゲイン行列によって得られる安定周期軌道と数値的に見てほぼ等しいものであることもわかっている. ふたつの異なるゲイン行列により, 同じ周期軌道が安定化されるというこの事実は, DF 制御法の有効性を裏付けるひとつの大きな証拠であると考えられる.

今後の課題として以下のことがあげられる.

- (1) ゲイン行列の制約をはずすこと.
- (2) 先述の奇数条件も含めて, DF 制御法の限界を完全に証明すること.
- (3) DF 制御項における時間遅れの摂動を考慮すること.
- (4) 時間遅れをもつ非線形微分方程式の周期解の安定性とフロッケ理論との関連性の証明.
- (5) 時間遅れをもつ周期系微分方程式のフロッケ乗数の数値計算スキームの開発.
- (6) DF 制御法の成否を判定するための, 数値計算スキームの開発.
- (7) 非自励系に対する DF 制御法の解析.

以上の課題が解決されることにより, 科学技術の発展に大きな貢献ができると考えられる. そもそも DF 制御法は周期軌道の安定化手法として非常に簡便な制御法であり, 理論的裏づけが余りなされていない現在でも広く応用されている. そのような中, 理論的な裏づけは, その手法の信頼性を保証することにつながり, また, DF 制御法を応用する際, ゲイン行列や時間遅れの設定に試行錯誤が不必要となり, 一般的な普及が進む. 応用面のみならず, 数学的側面においても, 時間遅れをもつ微分方程式論の更なる発展が期待できる. また, DF 制御法はカオスアトラクタに内在する不安定な状態を容易に取り出すことができるというものなので, その構造の理論的解明にも役立つことが期待される.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① 宮崎倫子, 申正善, 内藤敏機, Delayed Feedback 方程式とその性質, 京都大学数理解析研究所講究録, 2009,1637, 74-86, 査読無.
- ② 宮崎倫子, 常微分方程式の解の漸近挙動における時間遅れの影響について, 研究集会 PPM2006 報告集, 2007, 20-28, 査読無.
- ③ K. Ashizawa and R. Miyazaki, Asymptotic constancy for a linear differential system with multiple delays, Applied Mathematics Letters, 19, 2006, 1390-1394, 査読有.
- ④ K. Ashizawa, R. Miyazaki, A class of adjacency matrices in a 3-node Network, 京都大学数理解析研究所講究録, 1474, 2006, 144-153, 査読無.
- ⑤ 宮崎倫子, Delayed Feedback 制御による周期解の安定化問題に関する解析について, 研究集会 P P M 2005 報告集, 2006, 60-75, 査読無.
- ⑥ 門脇正樹, 宮崎倫子, Delayed Feedback 制御の限界について, 京都大学数理解析研究所講究録, 1445, 2005, 121-128, 査読無.
- ⑦ 太田年彦, 高橋康介, 宮崎倫子, 差分方程式における周期軌道の安定化法について, 京都大学数理解析研究所講究録, 1445, 2005, 129-136, 査読無.

[学会発表] (計 11 件)

- ① 宮崎倫子, 内藤敏機, 申正善, ある Delay Feedback 制御による周期解の安定化問題, 研究集会「微分方程式の総合的研究」, 京都大 2008/12/20
- ② 申正善, 内藤敏機, 宮崎倫子, Delayed Feedback 方程式とその性質, RIMS 研究集会「関数方程式のダイナミクスと数値モデル」, 京都大, 2008/11/5.
- ③ 申正善, 内藤敏機, 宮崎倫子, 周期解の安定化問題について—特性指数を中心に—, 札幌医科大学における微分方程式セミナー, 札幌医科大学, 2008/9/2.
- ④ 宮崎倫子, Delayed Feedback 制御による周期軌道の安定化についての数値的検証, 研究集会「界面現象のダイナミクスを解明する最前線の数値解析とその展開 III」, 神戸インスティテュート, 2007/10/16.
- ⑤ 宮崎倫子, 常微分方程式の解の漸近挙動に対する時間遅れの影響とその解析, 日本数学会年会 函数方程式論分科会

- (特別講演), 埼玉大, 2007/3/27.
- ⑥ 宮崎倫子, 常微分方程式の解の漸近挙動における時間遅れの影響について, 研究集会「偏微分方程式と現象:PDEs and Phenomena in Miyazaki 2006」, 宮崎大, 2006/11/17.
 - ⑦ 宮崎倫子, 時間遅れをもつ項が周期解に与える影響について, 研究集会「関数微分方程式セミナー2006 寝屋川」, 大阪電気通信大, 2006/3/4.
 - ⑧ 宮崎倫子, Delayed Feedback 制御による周期解の安定化問題に関する解析について, 研究集会「偏微分方程式と現象:PDEs and Phenomena in Miyazaki 2005」, 宮崎大, 2005/11/19.
 - ⑨ 宮崎倫子, タイムラグをもつ微分方程式の周期解の不安定性について, RIMS 研究集会「関数方程式の解のダイナミクスと数値シミュレーション」, 京都大, 2005/11/2.
 - ⑩ 宮崎倫子, タイムラグをもつ微分方程式の周期解の安定性について, 研究集会「広島大学における微分方程式セミナー」, 広島大, 2005/8/30.
 - ⑪ 宮崎倫子, タイムラグをもつ微分方程式の周期解の安定化問題とフロッケ指数, 研究集会「関数微分方程式牛窓セミナー2005」, 瀬戸市, 2005/8/27.

[図書] (計1件)

- ① 日本数理生物学会 編, 共立出版, 「数」の数理生物学, 2008, pp.67-71.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

宮崎 倫子 (MIYAZAKI RINKO)
静岡大学・工学部・准教授
研究者番号: 40244660

(2) 研究分担者

無し

(3) 連携研究者

内藤 敏機 (NAITO TOSHIKI)
電気通信大学・電気通信学部・教授
研究者番号: 60004446

(4) 研究協力者

申 正善 (SHIN JONG SONG)
電気通信大学・非常勤