

令和元年6月21日現在

機関番号：24403

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16H03065

研究課題名(和文)「高水準の数学的リテラシー」概念下の教育デザイン・実施・継続的改善とその理論

研究課題名(英文) Design, implementation, continuous improvement and theory of university mathematics education under the concept of advanced mathematical literacy

研究代表者

川添 充 (Kawazoe, Mitsuru)

大阪府立大学・高等教育推進機構・教授

研究者番号：10295735

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,400,000円

研究成果の概要(和文)：大学レベルの数学的リテラシーの教育デザインについて、学習の文脈が重要であるとの共通認識のもとで研究を進めた。理系部門では半期分のテキストの作成(一変数の微積分と線形代数)、数学外の文脈の題材(工学の応用例)を用いた一連の教材の作成(多変数の微積分)を行い、アクティブ・ラーニングや反転授業を取り入れた授業を具体化した。文系部門では文系学生が数学を学ぶ重要性の分析からはじめ、数学知識の存在理由を数学的リテラシーの観点から捉える認識枠組みを構築し、この枠組みに基づく授業デザインの枠組みも開発した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

文系も含めて様々な分野で数学が必要となってきた現状から、数学科でない学生に対する数学教育への注目が国内外で高まっている。本研究は、非数学科生の数学教育を「数学的リテラシー教育」の観点から捉え、現実世界で数学を活用できる能力を身につけるための具体的な教育デザインとその理論的基盤を与えるものであり、現代の社会的要請に応える数学教育の実践と理論を提供するものである。

研究成果の概要(英文)：A research on the design of mathematics education at the college level was done from the viewpoint that makes much of the contexts of learning mathematics. The research group was divided into two working groups: one was charged with the mathematic education for a science course and the other was for a non-science course. The former developed sample texts of linear algebra and calculus of one variable function as well as a series of teaching materials of calculus of multi-variable function by taking account of engineering application. The way of active learning and flip teaching was also developed. The latter group studied implications of learning mathematics for students of non-science courses from the viewpoint of mathematical literacy and provided an epistemic framework which shows *raison d'être* of mathematical knowledge. Some examples as well as a tentative guideline of designing mathematics education were proposed according to the framework.

研究分野：数学教育

キーワード：数学的リテラシー 大学教育 数学教育

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 大学数学教育の国際動向：大学教育が現在抱える問題を射程に含む数学教育の理論は、海外では 1980 年代から成果がある。E. Dubinsky の APOS 理論、A. Sfard の具象化理論、D. Tall の数学的思考の理論、フランスを中心に発達した Y. Chevallard や M. Artigue らの数学教授学の諸理論などである。数学教授学では、認識論的分析、数学的知識の存在理由への注目、概念理解における Praxeology の使用、教育デザインにおける「世界を問う」パラダイムの採用、ICT の積極的利用などに関する理論が形成され実践を支えてきた。

(2) 日本の現状：日本では、文系も含めて様々な分野で数学が必要となっている現状に大学教育が追いついていないとの問題意識から、数学的リテラシーの言葉で、文系理系含めた大学生全体に一定の数学的思考力を求める議論が盛んに行われている。しかしながら、数学的リテラシー教育への取り組みは、一部の個々の教員や大学の先進的な実践にとどまり、十分に広がっているとは言えない。この背景には、高等教育で数学的リテラシー教育のめざす目標が十分に概念化されず、教育デザインの理論化も不十分であることがあると考えられる。

(3) これまでの研究成果：問題意識に基づき、2015 年度までの研究で、高水準の数学的リテラシーの能力概念を「大学水準の教育内容とされる数学的知識・技能を活用して現実的な諸問題を解決する、認知領域と非認知領域を統合した能力」として定義するとともに、その能力を育てる教育デザインの枠組として、採用する文脈と扱う数学的知識、育成する認知的能力・価値意識・態度を明確にして教育内容を組み立てること、学生の思考における積極性・能動性を引き出す多様な方法を受講者との適合性に従って採用すること、ルーブリックの公開などで学習目標を学生と共有し、授業進行に伴う学生の理解、学習態度、価値意識の変遷を敏感に捉えることの3つの観点を提示した。これらの成果を基盤として、大学における数学的リテラシー教育のさらなる理論化と実践研究を積み重ねることにより、大学数学教育の現実的な改善、高大接続の改善に貢献することができると考えた。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、高水準の数学的リテラシーの能力持つ人材を育成する数学教育の理論とその実践を作り出すこと、能力目標とそれを育てる教育デザイン枠組のもとで、多様な大学の多様な教育科目の実情に沿って実際の数学科目の教育をデザインし、実践し、継続的な改善を行うこと、アクティブ・ラーニングの手法・内容の開発や ICT 利用ツールの開発により現実の教育改革を進めること、国際研究集会の開催と海外での学会への積極的な参加を通して国際水準の数学教育理論に寄与することであった。

## 3. 研究の方法

(1) 教育理論の構築と実践に関しては、理系分野、文系分野で数学教育の実態が大きく異なることから、理系と文系に分けて進めることとした。理系分野の数学教育では標準的なカリキュラムがあることから、各科目での教育改善を目指すこととし、数学外の文脈を取り入れたコースデザイン、教材開発に取り組んだ。文系分野の数学教育には標準的なカリキュラムは存在せず、各大学の実情に沿って多様な教育実践がある。文系向けの数学的リテラシー教育としての多様な実践を捉えられる共通の土台となる理論的基盤の構築が必要との認識から、そもそも文系になぜ数学を教えるのかにまでさかのぼり、認識論的分析により、文系向けの数学的リテラシー教育を捉える認識枠組みの構築を目指した。さらに、認識枠組みに基づいた授業デザインの枠組みの構築にも取り組んだ。

(2) 教育デザインの改善のためには実践を適切に評価することが必要となる。評価に関しては、高水準の数学的リテラシーの定義に述べた能力を持つ人材を育成するという観点から、その能力をどう測るべきかをいくつかの授業実践で評価を試行して検証することで研究を進めた。主要な評価方法としてルーブリックを用い、とくに質的評価として定評のある ICE モデルにもとづいたルーブリックによる評価を試行した。また、非認知的能力の評価方法を模索するため、学習者の振り返りコメントの評価への活用を試み、振り返りコメントを授業評価に用いることの可能性を検証した。

## 4. 研究成果

(1) 線形代数の半期の内容（連立一次方程式と行列式）について、Chevallard の「世界探究」パラダイムを適用し、線形代数の概念理解を促進する「問い」の追究を中心に据えたコースをデザインし、そのテキストを作成した。各単元での学習は、「連立一次方程式を解く組織的な解法はあるか？」「ガウスの消去法で 0 になる行が現れたり現れなかったりするのなぜか？」などの問いの学習となるように設計された。（学会発表(7)）

(2) 一変数関数の微積分について、学習内容を具体的事象（主にニュートン力学）と結びつけて、「運動の数学化」を一貫した学習の文脈に設定したコースをデザインし、そのテキストを作成した。各単元での学習には物理など現実の事象が題材として採用された。（学会発表(3)）

(3) 多変数の微積分について、実際に工学で応用されている例をふんだんに盛り込んだ教材を作成した。具体的には、多変数関数の例として、金を含む複数の合金の金の含有量を考え、それが各合金の重さを独立変数とする多変数関数で表され、それらの係数が重量比による含有率となり、偏微分係数につながることを説明した。また、偏微分係数の図による理解として、一定幅の直線状の川に沿う堤防の法面（斜面）を、流下方向と平行な鉛直面および流下方向と垂直な鉛直面という2つの平面で切った断面で考えるアプローチをとった。他の例としては、津波時の避難行動に関する問題として、東西方向および南北方向の地表面の勾配がそれぞれそれらの方向の偏微分係数と一致し、さらにこれら偏微分係数をベクトルの各方向の成分として見たものが勾配ベクトルになることを説明して、ベクトル解析にも接続する配慮をしている。全微分については、時間と場所の関数で表される水温について、時間と場所がそれぞれ微増したときの水温の増加量として説明し、また面積積分については、水面下の傾斜面に作用する静水圧の問題から説明している。（学会発表(2)）

(4) 本科研で検証した ICE モデルを意識した授業設計モデルを構築した。具体的には、知識の定着、繋がりを意識した活用、応用・展開の3段階の学習目標に対する予習教材を構造的に用意し、適用型のeラーニング上に7レベルで配置した。そして、これを反転学習として活用しながら、アクティブ・ラーニング型の授業を行う形とした。この際、ICE モデルの3段階を3週分の講義にマッピングして、段階的に学習・定着の確認を図る完全習得学習型の授業設計とした。情報系の授業を中心に実践した結果、知識・スキル・態度において、大幅な学習の向上を確認した。そこで、これを本科研で検討している数学教育に適用するため、微積分を中心に予習教材の設計及び評価案の試行を行い、課題の抽出を図った。（学会発表(3)(6)）

(5) 文系向けの数学教育としては、まず、教育の目標・内容・育成する能力の水準の整理を行った上で、数学的リテラシー教育の授業デザインの枠組みとして、教育内容（教えるべき知識は何か）知識の存在理由（その知識がなぜ重要か、いつどのように役に立つのか、現実の問題解決場面において数学が用いられる目的の視点からとらえる）、学習の文脈（知識の存在理由が伝わるようにするにはどのような題材を使うべきか、どんな授業の流れにすべきか）、指導上のポイント（どのようにして sense-making を実現するか）の4点を明確化する枠組みを設定し、その上で、とくに数学的知識が用いられる目的に着目して、「知識の存在理由」を数学的リテラシーの観点からどう捉えるかの認識枠組みを構築した。認識枠組みは、数学が用いられる問題解決過程のモデル化、数学が用いられる問題解決過程の行為の分類、数学が用いられる問題解決過程における行為と数学的知識の具体的結びつきの明確化による知識の存在理由の顕在化、という3つのステップを通して構築した。

については、数学が用いられる問題解決過程を「課題認識 数学化の必要性の認識 状況把握の必要性の認識 状況把握 数学化 課題解決」の6つの段階でとらえた。前半の3つは問題解決方略の検討過程であり、後半の3つは問題解決の実行過程である。そして、問題解決の実行過程は解決に向けた具体的な行為の連鎖として捉えることができ、さらに、とくに数学化における行為がそこで用いられる数学的知識の存在理由と結びついている、との認識に到達し、この認識に基づいて数学的知識の存在理由を捉える枠組みを の作業を通して構築した。

では、既存の授業実践の分析から、数学の活用場面での数学的知識の本質（その知識がそこで活用されることの背後にある知識の本質）を分類・整理し、図1のようにまとめた。

行為	数学知識	存在理由（～ためのツールである。）
数える	組み合わせ 数列の和 ( $\Sigma$ )	数え上げる 離散的变化の総和を求める
測る	概算 積分 (J) 確率、割合	量を見積もる 連続的变化の累積を求める 可能性を数値化する
比べる	統計 微分	データ間の違いを調べる 最小値・最大値を求める
変化を捉える	数列 関数 ベクトルと行列	離散的变化をモデル化する 連続的变化をモデル化する 複数量の離散的变化をモデル化する
関係を捉える	1変数関数 多変数関数 ベクトルと行列	2つの変数間の関係を記述する 変数間の1対多の関係を記述する 変数間の多対多の関係を記述する

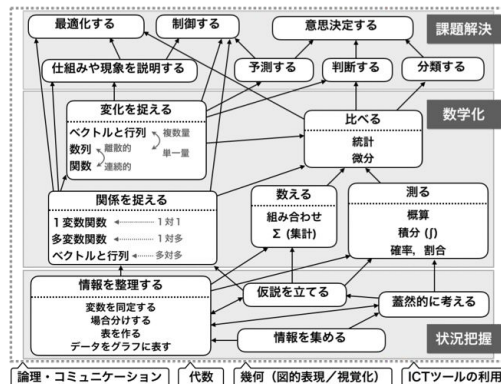


図1. 数学が用いられる問題解決過程における行為と数学的知識

最後に、上記の認識枠組みの基づいた授業デザイン過程の枠組みを検討し、授業デザインの手順を以下のように提示した。(i) 教える知識を定め、その知識の「存在理由」を図1から把握

する。(ii) 教える知識の存在理由に沿った学習目標を定める。(iii) 知識の存在理由に沿った使われ方を考える現実の題材を探す。(iv) 授業での学習活動を、(iii)で見つけた現実の問題解決場面をもとに、問題解決過程の6つの段階(課題認識 数学化の必要性の認識 状況把握の必要性の認識 状況把握 数学化 課題解決)に沿って組み立てる。学習活動の最後に「振り返り」を入れ、活用した数学的知識とその存在理由を振り返る活動を入れる。(v)本質の理解を問う評価方法を検討する。(雑誌論文(1)、学会発表(4)(5))

(6) 評価については以下の3つの成果を得た。微積分学のコースで自己評価をしやすくするためのルーブリックの工夫を行い、フローチャートに沿って自己診断を行うルーブリックを開発した。質的なルーブリックである ICE ルーブリックによる自己評価と成績との相関を調べ、中程度の正の相関があるとの結果を得た。数学的リテラシー科目で数学に対する見方が変化したか、数学に対する深い学びがなされたか、現実世界で数学を活用する知的習慣を身につけられたかなどの評価のために、学生の各回の授業での振り返りコメント(自由記述)を活用することを試み、振り返りコメントの分析の結果、振り返りコメントには学習の質に関わる記述が豊富に含まれていること、メタ認知的振り返りに該当する記述は数学が嫌いな学生のほうが数学が好きな学生よりも多いことなどが明らかになった。(雑誌論文(2)、学会発表(1))

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計2件)

- (1) 川添充、五島讓司、落合洋文、数学的リテラシー教育のための認識枠組み:大学での授業実践の分析を通して、日本数学教育学会第51回秋期研究大会発表集録、査読有、2018、pp.177-180.
- (2) Satoru Takagi, Takeo Nikami, A method of evaluation in calculus classes by rubric, ICIC Express Letters, Part B: Applications, 査読有, Vol.9, 2018, pp.715-720  
DOI: 10.24507/icicelb.09.07.715

〔学会発表〕(計7件)

- (1) Mitsuru Kawazoe, How to assess students' learning in mathematics literacy education: An attempt to use students' comments for assessment, The 11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11), 2019
- (2) 高木悟、羽田野袈裟義、理工系学生を想定した多変数関数の微分積分教材、2019 Transforming Undergraduate STEM Education in Japan, 2019
- (3) Satoru Takagi, Sei-ichi Yamaguchi, Ryuichi Mizumachi, Designing 1st year calculus courses, International Workshop on Mathematical Education for Non-Mathematics Students Developing Advanced Mathematical Literacy, 2018
- (4) 川添充、五島讓司、落合洋文、数学知識の本質の分析に基づく数学的リテラシー教育の授業デザイン、大学教育学会2018年度課題研究集会、2018
- (5) Mitsuru Kawazoe, Designing mathematics education based on the classification of human activities, International Workshop on Mathematical Education for Non-Mathematics Students Developing Advanced Mathematical Literacy, 2018
- (6) Hiroshi Komatsugawa, A Model of Flipped Classroom Using an Adaptive Learning System, International Workshop on Mathematical Education for Non-Mathematics Students Developing Advanced Mathematical Literacy, 2018
- (7) Ryuichi Mizumachi, Advanced Mathematical Literacy and Designs of 1st Year Mathematical Courses for STEM Students, International Workshop on Mathematical Education for Non-Mathematics Students Developing Advanced Mathematical Literacy, 2018

〔図書〕(計1件)

- (1) 水町龍一編、東信堂、大学教育の数学的リテラシー、2017、326

〔産業財産権〕

- 出願状況(計0件)
- 取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

高水準の数学的リテラシー教育研究会

<http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~kawazoe/kaken2016/index.html>

International Workshop: Mathematical Education for Non-mathematics Students Developing Advanced Mathematical Literacy, <http://iwme.jp/jp/>

## 6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：落合 洋文

ローマ字氏名：Hirofumi Ochiai

所属研究機関名：名古屋文理大学

部局名：情報メディア学部

職名：教授

研究者番号(8桁): 00183773

研究分担者氏名：五島 譲司

ローマ字氏名：George Gotoh

所属研究機関名：新潟大学

部局名：教育・学生支援機構

職名：准教授

研究者番号(8桁): 90360205

研究分担者氏名：小松川 浩

ローマ字氏名：Hiroshi Komatsugawa

所属研究機関名：千歳科学技術大学

部局名：理工学部

職名：教授

研究者番号(8桁): 10305956

研究分担者氏名：高木 悟

ローマ字氏名：Satoru Takagi

所属研究機関名：早稲田大学

部局名：グローバルエデュケーションセンター

職名：准教授

研究者番号(8桁): 50367017

研究分担者氏名：西 誠

ローマ字氏名：Makoto Nishi

所属研究機関名：金沢工業大学

部局名：基礎教育部

職名：教授

研究者番号(8桁): 00189250

研究分担者氏名：羽田野 袈裟義

ローマ字氏名：Kesayoshi Hadano

所属研究機関名：九州産業大学

部局名：建築都市工学部

職名：教授

研究者番号(8桁): 70112307

研究分担者氏名：水町 龍一(2017年度まで)

ローマ字氏名：Ryuichi Mizumachi

所属研究機関名：湘南工科大学

部局名：工学部

職名：准教授

研究者番号（8桁）：50157517

(2)研究協力者

研究協力者氏名：青木 茂

ローマ字氏名：Shigeru Aoki

研究協力者氏名：井上 秀一

ローマ字氏名：Shuichi Inoue

研究協力者氏名：上江洲 弘明

ローマ字氏名：Hiroaki Uesu

研究協力者氏名：齋藤 正顕

ローマ字氏名：Seiken Saito

研究協力者氏名：高安 美智子

ローマ字氏名：Michiko Takayasu

研究協力者氏名：藤間 真

ローマ字氏名：Makoto Tohma

研究協力者氏名：中上川 友樹

ローマ字氏名：Tomoki Nakamigawa

研究協力者氏名：浪川 幸彦

ローマ字氏名：Yukihiko Namikawa

研究協力者氏名：西山 博正

ローマ字氏名：Hiromasa Nishiyama

研究協力者氏名：長谷川 研二

ローマ字氏名：Kenji Hasegawa

研究協力者氏名：船倉 武夫

ローマ字氏名：Takeo Funakura

研究協力者氏名：松田 修

ローマ字氏名：Osamu Matsuda

研究協力者氏名：森 園子

ローマ字氏名：Sonoko Mori

研究協力者氏名：森本 真理

ローマ字氏名：Mari Morimoto

研究協力者氏名：柳 研二郎

ローマ字氏名：Kenjiro Yanagi

研究協力者氏名：山口 誠一

ローマ字氏名：Sei-ichi Yamaguchi

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。