様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４ 年　 ５ 月 １４ 日現在

機関番号：１２６０８
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2016～2020
課題番号：１６Ｈ０３９２０

研究課題名（和文）アフィン・リー環における臨界レベル・ゼロレベル対応と半無限旗多様体

研究課題名（英文）Relation between representations at the critical level and those of level zero for affine Lie algebras and semi-infinite flag manifolds

研究代表者
内藤　聡（Naito, Satoshi）

東京工業大学・理学院・教授

研究者番号：６０２５２１６０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　10,500,000円

研究成果の概要（和文）：　　複素単純代数群に付随する無限次元代数多様体である半無限旗多様体の（極大）トーラス同変 K-群と、アフィン量子群のレベル・ゼロ表現の間の密接な関係を明らかにした。そして、この関係に基づいて、アフィン量子群のレベル・ゼロ Demazure 加群の次数付き指標に関するある種の指標等式を証明する事により、半無限旗多様体のトーラス同変 K-群において任意の整ウエイトに付随する直線束とのテンソル積に関する構造定数を与える Chevalley 公式を証明した。この Chevalley 公式は、量子 alcove model と呼ばれる組合せ論的対象物によって記述されるものである。

研究成果の学術的意義や社会的意義
　複素単純代数群に付随する半無限旗多様体のトーラス同変 K-群は、有限次元旗多様体のトーラス同変量子 K-群と同型である事が知られている。さらに、有限次元旗多様体のトーラス同変量子 K-群の量子積構造は、反優整基本ウエイトに付随する直線束との量子積と、トーラスの表現環上のこの K-群の加群構造によって一意的に決定される。
　我々の得た半無限旗多様体のトーラス同変 K-群における Chevalley 公式は任意の整ウエイトに付随する直線束に関するものであり、特別な場合としてこの反優整基本ウエイトの場合を含んでいて、有限次元旗多様体のトーラス同変量子 K-群の研究においても重要な意義を持つ。

研究成果の概要（英文）：　Semi-infinite flag manifolds are infinite-dimensional algebraic varieties associated to complex simple algebraic groups; the torus-equivariant K-group of a semi-infinite flag manifold is isomorphic to the torus-equivariant quantum K-theory of a finite-dimensional flag manifold.
We revealed a close relation between the torus-equivariant K-group of semi-infinite flag manifolds and the theory of level-zero modules over quantum affine algebras. Moreover, on the basis of this relation, we proved a Chevalley formula for the torus-equivariant K-group of semi-infinite flag manifolds, which describes the tensor product with the line bundle class associated to an arbitrary integral weight; this was achieved by establishing an explicit identity for the graded characters of level-zero Demazure modules over quantum affine algebras. Note that our Chevalley formula is described in terms of the quantum alcove model, which is a uniform combinatorial model in combinatorial representation theory.

研究分野：表現論

キーワード：表現論　アフィン量子群の表現論　アフィン・リー環の表現論　レベル・ゼロ表現　半無限旗多様体　旗多様体の量子 K-群

１．研究開始当初の背景

(1) K-理論的 Peterson 同型 (引用文献 ⑥ 参照)

(連結かつ単連結な) 複素単純代数群 G に対して、(thin) アフィン・グラスマン多様体 Gr は、等質空間 G((z))/G[[z]] に無限次元代数多様体 (ind-finite variety) の構造を入れたものとして定義される。G の極大トーラスを H とするとき、アフィン・グラスマン多様体 Gr の H-同変 K-ホモロジー $K_0(Gr)$ には (Pontryagin) 積が定義され、環の構造が入る。一方で、G の Borel 部分群を B とするとき、(有限次元) 旗多様体 G/B の H-同変 K-環 K(G/B) の量子変形として H-同変量子 K-環 QK(G/B) が定義される。D. Peterson によって、これら 2 つの環 (を適当に局所化したもの) の間には、H の表現環 R(H) 上の代数としての同型写像 (K-Peterson 同型) が存在して、その同型写像によって Gr のシューベルト (部分多様体の構造層の) 類は QK(G/B) のシューベルト類 (に、変数 Q の適当な単項式を掛けたもの) に移されると予想されていた; この同型の下で、$K_0(Gr)$ の Pontryagin 積に関する構造定数 (R(H) の元) と QK(G/B) の量子積に関する構造定数 (R(H) の元) が一致すると予想されていた。より正確には、この様な同型の存在は、アフィン・グラスマン多様体 Gr の H-同変ホモロジーと旗多様体 G/B の H-同変量子コホモロジーの場合に Peterson によって主張され、T. Lam, M. Shimozono, A. Schilling たちによって確認された後に、上で述べた K-theory 版が提唱されていた。

(2) アフィン量子群のレベル・ゼロ表現との関係 (引用文献 ⑨ 参照)

アフィン・グラスマン多様体 Gr はアフィン・リー環に対応するアフィン Kac-Moody 群に付随する等質空間に他ならないので、その K-ホモロジー $K_{0}(Gr)$ がアフィン・リー環の可積分既約最高ウエイト表現の理論と (Borel-Weil 型の定理によって) 密接に結びついている事は非常に自然である。その一方で、旗多様体 G/B の量子コホモロジーや量子 K-環 QK(G/B) の背景にアフィン・リー環のどのような表現論があるのかは、あまり研究されていなかった。しかし、W. Fulton-C. Woodward や L. Mihalcea によって得られた量子コホモロジーにおける (余次元 1 のシューベルト類との量子積を記述する) Chevalley 公式の記述は、有限ワイル群 W に付随する量子 Bruhat グラフと呼ばれる有向グラフを用いてなされていた。そして、研究代表者の内藤聡が佐垣大輔教授 (筑波大学) や C. Lenart 教授 (New York 州立大学 Albany 校) とのこれまでの共同研究において研究の対象として来たアフィン量子群のレベル・ゼロ表現 (特に、柏原正樹教授 (京都大学) によって導入されたレベル・ゼロ extremal ウエイト加群や、その商加群として得られるレベル・ゼロ基本表現のテンソル積) の結晶基底も、やはり量子 Bruhat グラフ (または、そのアフィン・ワイル群 W_{af} への持ち上げである半無限 Bruhat グラフ) によって記述される事が分かっていた。特に、レベル・ゼロ extremal ウエイト加群の Demazure 部分加群 (レベル・ゼロ Demazure 加群と呼ぶ) の次数付き指標は量子 Bruhat グラフ (または、半無限 Bruhat グラフ) によって明示的に記述され、それが非対称 Macdonald 多項式の $t = 0$ における特殊化と本質的には一致する事が分かっていた。

２．研究の目的

(1) 申請時当初の研究目的

本研究課題の研究目的は、上で述べたような背景に基づいて、旗多様体 G/B の H-同変量子 K-環 QK(G/B) のアフィン量子群のレベル・ゼロ表現による解釈を与え、さらにその量子積に関する構造定数を量子 Bruhat グラフ (または、半無限 Bruhat グラフ) の言葉で記述する事であった。さらには、アフィン・ワイル群 W_{af} におけるアフィン・グラスマン元 (W による各剰余類の、長さが最小な代表元) の全体に Bruhat order を入れる事で得られる半順序集合が W に付随する量子 Bruhat グラフと密接な関係にある事 (“quantum = affine”現象) を使って、K-Peterson 同型とアフィン・リー環の臨界レベル既約最高ウエイト表現の関係も見いだしたい、と考えた。

(2) 有限次元旗多様体の量子 K-環との関係の追求

H-同変量子 K-環 QK(G/B) は、量子コホモロジーと相対論的戸田格子 (と呼ばれる非線形微分方程式) の関係に動機付けられて、A. Givental と Y.-P. Lee によって導入された環であり、その量子積に関する構造定数は K-理論的 Gromov-Witten 不変量の交代和として与えられる; 但し、この定義に基づいて構造定数を計算する事は一般には難しい。この量子 K-環 QK(G/B) は、これまで主に代数幾何学及びシンプレクティック幾何学の手法を用いて研究されて来たが、その量子積に関する構造定数については、未だあまり多くの明示的結果が得られていない。そこで、この量子 K-環 QK(G/B) のアフィン量子群の表現論による解釈が与えられれば、これまでに蓄積された組合せ論的表現論における様々な道具 (特に、アフィン量子群のレベル・ゼロ表現の結晶基底と、その半無限 Lakshmibai-Seshadri パスや量子 Lakshmibai-Seshadri パスによる

実現）を利用する事で、一般の構造定数に関する明示的な結果が得られるものと期待される。特に、旗多様体 G/B の H-同変量子コホモロジーにおける Chevalley 公式の拡張として、H-同変量子 K-環 $QK(G/B)$ における（余次元 1 の (opposite) シューベルト類との量子積を記述する）Chevalley 公式を証明する事が、本研究課題における重要なステップになると予想された。なお、この Chevalley 公式に基づいて H-同変量子 K-環 $QK(G/B)$ における量子積に関する一般の構造定数を計算するアルゴリズムが Mihalcea によって得られているので、原理的には Chevalley 公式によって量子積構造は決定される事を注意しておく; 一般の構造定数についての明示的な表示が得られるかどうかは、別問題である。

３．研究の方法

(1) 半無限 LS パスに関する standard monomial theory の研究

半無限旗多様体の H-同変 K-群における優整ウエイトに対する Chevalley 公式を証明するには、アフィン量子群のレベル・ゼロ Demazure 加群の次数付き指標に関する Chevalley 型指標等式を示す必要がある; レベル・ゼロ Demazure 加群は、アフィン量子群上のレベル・ゼロ extremal ウエイト加群の部分加群である。アフィン量子群上のレベル・ゼロ extremal ウエイト加群は柏原正樹教授によって導入され、それが結晶基底と呼ばれる組合せ論的に非常に良い振る舞いをする基底を持つ事も証明されていた。そして、この結晶基底の明示的な実現が“半無限 Lakshmibai-Seshadri パス”によって与えられる事は、我々のこれまでの研究によって分かっていた; 半無限 Lakshmibai-Seshadri パスは、アフィン・ワイル群 W_{af} の元たちの半無限 Bruhat 順序に関する減少列であって（与えられた優整ウエイトによって規定される）ある種の整数性条件を満たすものとして定義される。また、レベル・ゼロ Demazure 加群も結晶基底を持ち、その明示的な実現が、やはり半無限 Lakshmibai-Seshadri パスによって与えられる。そこで、これらの次数付き指標に関する Chevalley 型指標等式を示すには、半無限 Lakshmibai-Seshadri パスに関する standard monomial theory の類似物を示す必要があった。この部分の研究は、研究協力者の佐垣大輔教授と研究代表者の内藤聡が共同研究を行った。また、反優整ウエイトに対する Chevalley 公式を証明するためには、やはりレベル・ゼロ Demazure 加群の次数付き指標に関する Chevalley 型指標等式を示す必要があり、これには standard monomial theory に加えて、半無限 Lakshmibai-Seshadri パスの集合のクリスタル構造を精密に調べる必要があった。この部分の研究も、佐垣大輔教授と内藤聡が共同研究を行った。

(2) 量子 alcove model による Chevalley 公式の記述

我々が得た、優整ウエイトに対する Chevalley 公式と反優整ウエイトに対する Chevalley 公式は、どちらも“量子 Lakshmibai-Seshadri パス”によって記述されていた; 量子 Lakshmibai-Seshadri パスは、有限ワイル群 W の元たちからなる（W に付随する量子 Bruhat グラフにおける）有向パスであって、（与えられた優整ウエイトによって規定される）ある種の整数性条件を満たすものとして定義される。一般の整ウエイトに対しては量子 Lakshmibai-Seshadri パスが定義されていないため、一般の整ウエイトに対する Chevalley 公式を証明するには、先ずこれらの Chevalley 公式を量子 alcove model の言葉に翻訳し、それらの結果を組み合わせた上で、さらに量子 Bruhat 作用素に関する Yang-Baxter 方程式を使って変形して行く必要があった。この部分の研究は、量子 alcove model の専門家である研究協力者の C. Lenart 教授と研究代表者の内藤聡が共同研究を行った。

(3) nil-DAHA の多項式表現の利用による逆 Chevalley 公式の記述

一般の整ウエイトに対する Chevalley 公式を逆に解いた形の“逆 Chevalley 公式”を記述するには、量子 alcove model では明らかに不十分であったので、この目的により適した組合せ論的な言葉を見つけ出す必要があった。そしてそのためには、nil-DAHA (double affine Hecke algebra) の多項式表現が非常に有効な手段であると考えられた。この部分の研究は、DAHA の専門家である研究協力者の D. Orr 教授（Virginia 工科大学）と研究代表者の内藤聡が共同研究を行い、量子 alcove model と類似してはいるが明確に異なる組合せ論対象物である“decorated 量子 walks”を導入しそれによって記述する事で、複素単純代数群 G が A, D, E 型でウエイトが minuscule ウエイトの場合には逆 Chevalley 公式を得る事が出来た。この結果を一般の整ウエイトにまで拡張するには、一般の整ウエイトを minuscule ウエイトの和として表し、minuscule ウエイトに対する逆 Chevalley 公式を複数回使った上で、その結果を Yang-Baxter 変換を繰り返して変形して行く必要があった。この部分の研究は、佐垣大輔教授と内藤聡が共同研究を行った。

４．研究成果

(1) 半無限旗多様体の K-群とアフィン量子群のレベル・ゼロ表現（引用文献 ③ 参照）

連結かつ単連結な複素単純代数群 G に付随する半無限旗多様体 Q_{G}^{rat} は、G の Borel 部分群 B の unipotent radical を N とするとき、等質空間 $G((z))/(H(\mathbb{C})\cdot N((z)))$ に無限次元代数多様体 (reduced ind-scheme of infinite type) の構造を入れたものとして定

義され、半無限旗多様体（の形式的冪級数版）Q_{G} は、有限ワイル群 W の最長元 w_0 に対応する Q_{G}^{rat} の（半無限）Schubert 部分多様体として定義される；これは、Q_{G}^{rat} への Iwahori 部分群 I（これは、$G[[z]]$ の部分群）の自然な作用に関する軌道であって最長元 w_0 に対応するものの Zariski 閉包で、やはり無限次元代数多様体である。以下では、G に付随する半無限旗多様体と言えば、この形式的冪級数版 Q_{G} の事とする。

先ず、我々は、有限次元旗多様体 G/B に対する Borel-Weil-Bott 理論の類似を、半無限旗多様体 Q_{G} に対して証明した。つまり、アフィン・ワイル群 W_{af} の元 x（で、半無限 Bruhat 順序に関して単位元 e 以上であるもの）に対応する（半無限）Schubert 部分多様体 $Q_{G}(x)$ を考察し、整ウエイト λ に付随する Q_{G} 上の直線束の $Q_{G}(x)$ への制限の層係数コホモロジー群を決定した。そして、0 次より高次の全てのコホモロジー群は任意の整ウエイト λ に対して消滅し、また、0 次コホモロジー群も λ が優整ウエイトである場合を除いて消滅する事を示した。さらに、λ が優整ウエイトの場合には、0 次コホモロジー群（つまり、λ に付随する直線束の大域切断の空間）の次数付き指標が、x に付随するレベル・ゼロ Demazure 加群（アフィン量子群上の $w_0(\lambda)$ を extremal ウエイトとするレベル・ゼロ extremal ウエイト加群の部分加群）の次数付き指標に他ならない事を証明した。

次に我々は、上で述べた結果に基づいて、半無限旗多様体 Q_{G} の H-同変 K-群 $K(Q_{G})$ を導入し、任意の整ウエイト λ に付随する Q_{G} 上の直線束との $K(Q_{G})$ におけるテンソル積構造を記述する Chevalley 公式が、レベル・ゼロ Demazure 加群の次数付き指標に関するある種の指標等式（Chevalley 型指標等式）から導かれる事を示した。さらに、整ウエイト λ が優整ウエイトの場合にこの Chevalley 型指標等式を証明し、その結果として優整ウエイトに対する Chevalley 公式を得た。この Chevalley 公式は、アフィン・ワイル群 W_{af} の元たちの半無限 Bruhat 順序に関する減少列であって（整ウエイト λ によって規定される）ある種の整数性条件を満たすものとして定義される“型が λ の半無限 Lakshmibai-Seshadri パス”によって記述されている。

(2) 有限次元旗多様体の量子 K-環との関係（引用文献 ①、② 参照）

この後、半無限旗多様体 Q_{G} の H-同変 K-群 $K(Q_{G})$ が旗多様体 G/B の H-同変量子 K-環 $QK(G/B)$ と（H の表現環 $R(H)$ 上の加群として）同型であり、この同型を通して、反優整基本ウエイトに付随する直線束との $K(Q_{G})$ におけるテンソル積が、同じ反優整基本ウエイトに付随する直線束との $QK(G/B)$ における量子積に対応する事が、加藤周教授（京都大学）によって示された；また、この同型写像は $QK(G/B)$ の（opposite）Schubert 類を、同じ有限ワイル群の元に付随する $K(Q_{G})$ の（半無限）Schubert 類に移す。従って、反優整基本ウエイトに対する $QK(G/B)$ における Chevalley 公式が、同じ反優整基本ウエイトに対する $K(Q_{G})$ における Chevalley 公式から従う事になった。

(3) 半無限旗多様体の K-群における Chevalley 公式（引用文献 ④，⑧、⑩ 参照）

我々は、この後すぐに、一般の反優整ウエイト λ に対してレベル・ゼロ Demazure 加群の次数付き指標に関する Chevalley 型指標等式を証明し、その結果として $K(Q_{G})$ における Chevalley 公式を得る事が出来た。この結果は、特殊な場合として反優整基本ウエイトに対する Chevalley 公式を含んでいるため、反優整基本ウエイトに対する $QK(G/B)$ における Chevalley 公式も証明された；この結果から直ちに、余次元 1 の（opposite）Schubert 類との $QK(G/B)$ における量子積に関する Chevalley 公式が得られる。この Chevalley 公式は、有限ワイル群 W の元たちから成る（W に付随する量子 Bruhat グラフにおける）有向パスであって（整ウエイト λ によって規定される）ある種の整数性条件を満たすものとして定義される“型が λ の量子 Lakshmibai-Seshadri パス”によって記述されている。

さて、旗多様体 G/B の H-同変量子 K-環 $QK(G/B)$ への直接の応用がある訳ではないが、一般の整ウエイトに対する $K(Q_{G})$ における Chevalley 公式も、半無限旗多様体の幾何学的性質の研究において重要な役割を果たす事が期待される。そこで我々は、上で述べた優整ウエイトに対する Chevalley 公式と反優整ウエイトに対する Chevalley 公式を組み合わせる事によって、一般の整ウエイト λ に対する $K(Q_{G})$ における Chevalley 公式を証明した。この Chevalley 公式は、一般の整ウエイト λ に付随する量子 alcove model と呼ばれる組合せ論的対象物によって記述されている。そして、その証明は、先ず優整ウエイトと反優整ウエイトに対する Chevalley 公式のそれぞれを量子 alcove model の言葉で書き直し、それらを組み合わせた上で、さらに量子 Bruhat 作用素に関する Yang-Baxter 方程式を利用して変形して行く事によって実行された。このような、量子 alcove model による記述と証明が必要となった主な理由は、一般の整ウエイト λ に対しては型が λ の半無限 Lakshmibai-Seshadri パスや量子 Lakshmibai-Seshadri パスは存在しないが、量子 alcove model は一般の整ウエイト λ に対しても定義されているからである。

(4) 半無限旗多様体の K-群の $R(H)$-加群構造（引用文献 ⑤、⑦ 参照）

旗多様体 G/B の H-同変量子 K-環 QK(G/B) の量子積に関する構造定数については、それらを、余次元 1 の (opposite) Schubert 部分多様体（または、反優整基本ウエイトに付随する直線束）との量子積を記述する Chevalley 公式に基づいて決定するアルゴリズムが存在する。但し、このアルゴリズムは、H の表現環 R(H) 上の加群としての QK(G/B) の加群構造が記述出来ているという前提の下でのものである。そこで、残された問題は、QK(G/B) の R(H)-加群としての加群構造を記述する事である。ここで重要な事実は、R(H)-加群としては QK(G/B) は、半無限旗多様体 Q_{G} の H-同変 K-群 K(Q_{G}) と同型な事である。従って、K(Q_{G}) の R(H)-加群としての加群構造を記述する事が重要な課題となる。この様な記述は、K(Q_{G}) における一般の整ウエイトに対する Chevalley 公式を逆に解く事で得られる“逆 Chevalley 公式”によって与えられる。しかし、一般の整ウエイトに対する Chevalley 公式は量子 alcove model によって記述される無限和の形をしていて、それを実際に逆に解く事は非常に困難である上に、その結果を統一的に記述する組合せ論的な言葉を見いだす必要があった；実際、量子 alcove model ではこの目的には不十分であった。

我々は、複素単純代数群 G が A, D, E 型の場合に、量子 alcove model と類似してはいるものの明らかに異なる組合せ論的対象物として“decorated 量子 walks”を導入した。そして、それを用いて、先ずは minuscule ウエイトの場合に逆 Chevalley 公式を記述し証明する事が出来た。さらに、一般の整ウエイトの場合には、minuscule ウエイトに対する結果を複数回使った上で、それを Yang-Baxter 変換と呼ばれる局所的な操作を繰り返して変形して行く事によって、逆 Chevalley 公式を記述し証明する事が出来た。

(5) 今後の展望

今後の展望としては、これまでに得られた半無限旗多様体 Q_{G} の H-同変 K-群 K(Q_{G}) における Chevalley 公式と逆 Chevalley 公式を応用して、有限次元旗多様体 G/B の H-同変量子 K-環 QK(G/B) の構造に関する様々な未解決問題（例えば、複素単純代数群 G が A 型の場合の Pieri 公式に関する Lenart-Maeno の予想等）を証明する事を考えている。

引用文献

① S. Kato, Loop structure on equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds, preprint, arXiv:1805.01718.
② S. Kato, Frobenius splitting of Schubert varieties of semi-infinite flag manifolds, Forum Math. Pi, Vol. 9, 2021, Paper No. e51.
③ S. Kato, S. Naito, and D. Sagaki, Equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds and the Pieri-Chevalley formula, Duke Math. J., Vol. 169, 2020, pp. 2421–2500.
④ T. Kouno, C. Lenart, and S. Naito, New structure on the quantum alcove model with applications to representation theory and Schubert calculus, preprint, arXiv:2105.02546.
⑤ T. Kouno, S. Naito, D. Orr, and D. Sagaki, Inverse K-Chevalley formulas for semi-infinite flag manifolds, I: minuscule weights in ADE type, Forum Math. Sigma, Vol. 9, 2021, Paper No. e51.
⑥ T. Lam, C. Li, L.C. Mihalcea, and M. Shimozono, A conjectural Peterson isomorphism in K-theory, J. Algebra, Vol. 513, 2018, pp. 326–343.
⑦ C. Lenart, S. Naito, D. Orr, and D. Sagaki, Inverse K-Chevalley formulas for semi-infinite flag manifolds, II: arbitrary weights in ADE type, preprint, arXiv:2111.00628.
⑧ C. Lenart, S. Naito, and D. Sagaki, A general Chevalley formula for semi-infinite flag manifolds and quantum K-theory, preprint, arXiv:2010.06143.
⑨ C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals II: Alcove model, path model, and P = X, Int. Math. Res. Not., Vol. IMRN 2017, 2017, pp. 4259–4319.
⑩ S. Naito, D. Orr, and D. Sagaki, Chevalley formula for anti-dominant weights in the equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds, Adv. Math., Vol. 387, 2021, Paper No. 107828.

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計14件（うち査読付論文　14件／うち国際共著　5件／うちオープンアクセス　1件）

1．著者名 S. Naito and D. Sagaki	4．巻 26
2．論文標題 Level-zero van der Kallen modules and specialization of nonsymmetric Macdonald polynomials at t = ∞	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Transform. Groups	6．最初と最後の頁 1077--1111
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00031-020-09586-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1．著者名 K. Takafumi, S. Naito, D. Orr, and D. Sagaki	4．巻 9
2．論文標題 Inverse K-Chevalley formulas for semi-infinite flag manifolds, I: minuscule weights in ADE type	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Forum Math. Sigma	6．最初と最後の頁 Paper No. e51
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/fms.2021.45	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1．著者名 S. Naito, D. Orr, and D. Sagaki	4．巻 387
2．論文標題 Chevalley formula for anti-dominant weights in the equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Adv. Math.	6．最初と最後の頁 No. 107828
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2021.107828	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 S. Kato, S. Naito, and D. Sagaki	4．巻 169
2．論文標題 Equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds and the Pieri-Chevalley formula	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Duke Math. J.	6．最初と最後の頁 2421--2500
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/00127094-2020-0015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

１．著者名 S. Naito, F. Nomoto, and D. Sagaki	４．巻 169
２．論文標題 Tensor product decomposition theorem for quantum Lakshmibai-Seshadri paths and standard monomial theory for semi-infinite Lakshmibai-Seshadri paths	５．発行年 2020年
３．雑誌名 J. Combin. Theory Ser. A	６．最初と最後の頁 No. 105122
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jcta.2019.105122	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 S. Naito, F. Nomoto, and D. Sagaki	４．巻 24
２．論文標題 Representation-theoretic interpretation of Cherednik-Orr's recursion formula for the specialization of nonsymmetric Macdonald polynomials at $t = \infty$	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Transform. Groups	６．最初と最後の頁 151--191
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00031-017-9467-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 S. Naito, F. Nomoto, and D. Sagaki	４．巻 370
２．論文標題 Specialization of nonsymmetric Macdonald polynomials at $t = \infty$ and Demazure submodules of level-zero extremal weight modules	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Trans. Amer. Math. Soc.	６．最初と最後の頁 2739--2783
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/7114	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono	４．巻 22
２．論文標題 A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals III: Nonsymmetric Macdonald polynomials at $t = 0$ and Demazure characters	５．発行年 2017年
３．雑誌名 Transform. Groups	６．最初と最後の頁 1041--1079
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00031-017-9421-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono	4．巻 2017, no. 14
2．論文標題 A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals II: Alcove model, path model, and P = X	5．発行年 2017年
3．雑誌名 Int. Math. Res. Not.	6．最初と最後の頁 4259--4319
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnw129	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 S. Naito and H. Watanabe	4．巻 148
2．論文標題 A combinatorial formula expressing periodic R-polynomials	5．発行年 2017年
3．雑誌名 J. Combin. Theory Ser. A	6．最初と最後の頁 197--243
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jcta.2016.12.008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 N. Fujita and S. Naito	4．巻 285
2．論文標題 Newton-Okounkov convex bodies of Schubert varieties and polyhedral realizations of crystal bases	5．発行年 2017年
3．雑誌名 Math. Z.	6．最初と最後の頁 325--352
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-016-1709-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 S. Naito and D. Sagaki	4．巻 283
2．論文標題 Demazure submodules of level-zero extremal weight modules and specializations of Macdonald polynomials	5．発行年 2016年
3．雑誌名 Math. Z.	6．最初と最後の頁 937--978
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-016-1628-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 M. Ishii, S. Naito, and D. Sagaki	4．巻 290
2．論文標題 Semi-infinite Lakshmibai-Seshadri path model for level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras	5．発行年 2016年
3．雑誌名 Adv. Math.	6．最初と最後の頁 967--1009
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2015.11.037	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono	4．巻 71
2．論文標題 Quantum Lakshmibai-Seshadri paths and root operators	5．発行年 2016年
3．雑誌名 Adv. Stud. Pure Math.	6．最初と最後の頁 267--294
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計12件（うち招待講演　12件／うち国際学会　9件）

1．発表者名 Satoshi Naito
2．発表標題 Description of the Chevalley formula for the torus-equivariant quantum K-group of partial flag manifolds of (co-)minuscule type in terms of the parabolic quantum Bruhat graph
3．学会等名 RIMS Workshop on Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Satoshi Naito
2．発表標題 A description of the Z[P]-module structure of the K-theory of finite-dimensional flag manifolds in terms of a generalization of LS paths
3．学会等名 Workshop on Crystals and Their Generalizations（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

１．発表者名
Satoshi Naito

２．発表標題
Chevalley formula in the equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds

３．学会等名
Workshop on Quantum K-theory and Related Topics（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2018年

１．発表者名
Satoshi Naito

２．発表標題
Chevalley formula in the equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds

３．学会等名
京都大学数理解析研究所共同研究「組合せ論的表現論の諸相」（招待講演）

４．発表年
2018年

１．発表者名
Satoshi Naito

２．発表標題
Pieri-Chevalley formula in the equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds

３．学会等名
Geometry and Representation Theory at the Interface of Lie Algebras and Quivers（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2018年

１．発表者名
内藤 聡

２．発表標題
量子アフィン代数の表現論

３．学会等名
2018 年度（第 21 回）日本数学会代数学賞受賞特別講演（招待講演）

４．発表年
2018年

1．発表者名 Satoshi Naito
2．発表標題 Level-zero van der Kallen modules and specialization of nonsymmetric Macdonald polynomials at $t = \infty$
3．学会等名 Finite Groups, VOAs, and Related Topics 2018（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

1．発表者名 Satoshi Naito
2．発表標題 Level-zero van der Kallen modules and specialization of nonsymmetric Macdonald polynomials at infinity
3．学会等名 Conference on Algebraic Representation Theory（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2017年

1．発表者名 Satoshi Naito
2．発表標題 Standard monomial theory for semi-infinite LS paths and semi-infinite flag manifolds
3．学会等名 Taipei Workshop on Representation Theory of Lie Superalgebras and Related Topics（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2017年

1．発表者名 Satoshi Naito
2．発表標題 Pieri-Chevalley type formula for equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds
3．学会等名 Conference on Algebraic Representation Theory（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2016年

1．発表者名 Satoshi Naito
2．発表標題 Standard monomial theory for semi-infinite LS paths with geometric application
3．学会等名 Geometric Representation Theory 2016（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2016年

1．発表者名 Satoshi Naito
2．発表標題 アフィン量子群上の extremal ウエイト加群の Demazure 部分加群の指標公式と、非対称 Macdonald 多項式の特殊化
3．学会等名 日本数学会秋季総合分科会代数学分科会特別講演（招待講演）
4．発表年 2016年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	池田　岳 (Ikeda Takeshi) (40309539)	早稲田大学・理工学術院・教授 (32689)	
研究分担者	荒川　知幸 (Arakawa Tomoyuki) (40377974)	京都大学・数理解析研究所・教授 (14301)	

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計3件

国際研究集会	開催年
Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2018	2018年～2018年
Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2017	2017年～2017年

国際研究集会 Spring School on Representation Theory 2017	開催年 2017年～2017年

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	State University of New York at Albany	Virginia Polytechnic Institute		
米国	Virginia Polytechnic Institute			
米国	State University of New York at Albany	University of California, Davis	Virginia Polytechnic Institute	
米国	State University of New York at Albany			