

令和 4 年 6 月 10 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2016～2020

課題番号：16H03922

研究課題名（和文）可積分系における新たな代数的組合せ論的構造の研究

研究課題名（英文）Study of new algebraic and combinatorial structure in integrable systems

研究代表者

中西 知樹（Nakanishi, Tomoki）

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：80227842

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 14,840,000円

研究成果の概要（和文）：可積分系における代数的組合せ論的構造について、主に団代数の理論と応用の研究を行った。その結果、団代数における二重対数関数恒等式の古典力学の手法による導出、団代数におけるさまざまな同期性および関連する予想の系統的な証明、団代数理論と散乱理論の関係の団代数的観点による導出、団散乱図式の整合関係式が二重対数元間の五角関係式により生成されることの証明、団散乱図式に付随する二重対数関数恒等式とその量子化、F多項式の積表示の導出など、さまざまな新しい結果と知見を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

団代数は2000年頃にFominとZelevinskyにより導入された代数的組み合わせ論的構造であるが、ルート系と同様に、さまざまな数学的対象に共通して現れる基盤的な構造であることから、世界中の多くの数学者や物理学者により、その基礎と応用の研究が盛んになされている。本研究成果は団代数の基礎理論に対して、新しい多くの知見を与えるもので、今後長い期間において世界に共有される有用な科学的成果と考えている。

研究成果の概要（英文）：We study theory and applications of cluster algebras which is one of algebraic and combinatorial structure in integrable systems. We obtain the following new results and insights: derivation of dilogarithm identities in cluster algebras by classical mechanical method, systematic proofs of synchronicity phenomenon and related conjectures, derivation of the relation between cluster algebra theory and scattering diagrams in the cluster algebraic point of view, proof that any consistency relation in a cluster scattering diagram is generated by the pentagon identity among dilogarithm elements, dilogarithm identities associated to cluster scattering diagrams and their quantizations, derivation of product formula of F-polynomials.

研究分野：団代数

キーワード：団代数 団散乱図式 二重対数関数 五角関係式

1. 研究開始当初の背景

団代数の研究は, 1. 団代数の理論そのものの整備, 2. 団代数のさまざまな数学的対象への応用, に大別される. ここでは, 1に焦点を絞る. 団代数理論の基礎は, Fomin-Zelevinsky および Berenstein (2003-2007) による「Cluster Algebras I-IV」の論文シリーズによって一通りの完成をみた. そしてその後のさまざまな研究で明らかになったことは, 団代数理論において「 C 行列の符号同一性」と「 F 多項式の正值性」という二つの事実 (予想) が, その骨格を支えてるということであった. 一方で, 団代数の概念の定義は「変異」の定義に尽きているのであるが, この二つの予想は変異の定義からは容易に証明できない, ということも次第にわかってきた. このような状況で, Gross-Hacking-Keel-Kontsevich (2018, プレプリント 2014, 以下 [GHKK]) は, ミラー対称性に現れる散乱関式とトーリック・双有理幾何的な定式化の二つの手法を軸に, 上の二つの予想を肯定的に解決した

2. 研究の目的

研究開始当初において, [GHKK] の仕事は, その団代数に対する重要性にもかかわらず, 特に, 散乱関式とトーリック・双有理幾何という, それまでの団代数の研究の手法と大きく異なる手法のために, 団代数理論の研究者にとっては理解が困難であった. そこで, [GHKK] の理論からトーリック・双有理幾何的部分を取り除き, より従来の団代数理論に沿った形で定式化し, 上の二つの予想の証明を再構築することは, 団代数理論の基礎理論の整備の観点からは是非とも必要であり, これを本研究の最重要課題とした.

3. 研究の方法

[GHKK] の内容は 100 ページを超える大著であり, 著者らの専門である代数幾何的論証が多くを占めている. そこで, それらの部分を削ぎ落としながら, さらに, 1. 団代数と団散乱関式の関係, 2. 団散乱関式の構成, という二つの要素に分離をし, 一から再定式化することとした. また, これ以外に [GHKK] の結果である「 C 行列の符号同一性」と「 F 多項式の正值性」のもたらず結果についての解析も同時に進めた.

4. 研究成果

以下, 得られた結果を arXiv での発表順に列挙する.

- (1) 一般団代数と一般化した二重対数関数 [Nak18]
Chekhov-Shapiro による一般団代数に対して二重対数関数を拡張し, 周期に付随する一般化した二重対数関数の恒等式を導出した.
- (2) 二重対数関数恒等式の古典力学的導出 [GNR17]
中西 (2011) により得られた団代数の周期に付随する二重対数関数恒等式を古典力学の手法, 特に Lagrangian 形式を用いることにより再導出した.
- (3) 漸近的符号同一性 [GN19]

C 行列の符号同一性の一般化として、任意の拡大 B 行列の拡大部分が漸近的符号同一性を持つこと実験的に見出し、いくつかの場合に証明した。

- (4) 団パターンの同期性 [Nak21d]
団パターンに現れる種々の同期性と関連する予想を系統的に証明し、さらに一般団代数の場合に拡張した
- (5) 団パターンと散乱図式の関係 [Nak21a]
[GHKK] に与えられた団代数と散乱図式の間を、双有理・トーリック幾何の定式化を用いずに再導出した。
- (6) 団散乱図式の構成の再定式化 [Nak21b]
[GHKK] による団散乱図式の正実現を二重対数元の並べ替えアルゴリズムを用いて再構成し、団散乱図式の整合関係式が二重対数元の五角関係式から生成されることを示した。
- (7) 団散乱図式における二重対数関数恒等式 [Nak21c]
(6) の結果を用いて、団散乱図式のループに付随する二重対数関数恒等式を導出した
- (8) F 多項式の積公式の導出 [LMN21]
(5) の結果を用いて団パターンの F 多項式の積公式を導いた。
- (9) 団代数理論の基礎概説 [Nak22a]
新たに団代数の研究を志す研究者のための団代数の簡潔な入門がない現状を鑑みて基礎事項の概説を著した。
- (10) 量子団散乱図式と五角関係式 [Nak22b]
(7) の量子化として量子団散乱図式の量子二重対数関数恒等式を導出し、古典的な場合と異なり正値性が成り立たない一連の例を与えた。

REFERENCES

- [GN19] M. Gekhtman and T. Nakanishi, *Asymptotic sign coherence conjecture*, *Experimental Mathematics* (2019), DOI: 10.1080/10586458.2019.1650401.
- [GNR17] M. Gekhtman, T. Nakanishi, and D. Rupel, *Hamiltonian and Lagrangian formalisms of mutations in cluster algebras and application to dilogarithm identities*, *J. Integrable Syst.* **2** (2017), 1–35; arXiv:1611.02813.
- [LMN21] F. Lin, G. Musiker, and T. Naknaishi, *Two formulas for F -polynomials*, 2021, arXiv:2112.11839 [math.CO].
- [Nak18] T. Nakanishi, *Rogers dilogarithms of higher degree and generalized cluster algebras*, *Jour. Math. Soc. Japan* **70** (2018), 1269–1304; arXiv:1605.04777.
- [Nak21a] T. Nakanishi, *Cluster algebras and scattering diagrams, Part II. Cluster patterns and scattering diagrams*, 2021, preliminary draft for a monograph, arXiv:2103.16309 [math.CO].
- [Nak21b] ———, *Cluster algebras and scattering diagrams, Part III. Cluster scattering diagrams*, 2021, preliminary draft for a monograph; arXiv:2111.00800 [math.CO].
- [Nak21c] ———, *Dilogarithm identities in cluster scattering diagrams*, 2021, arXiv:2111.09555 [math.CO].
- [Nak21d] ———, *Synchronicity phenomenon in cluster patterns*, *J. London Math. Soc.* **103** (2021), 1120–1152; arXiv:1906.12036 [math.RA].
- [Nak22a] ———, *Cluster algebras and scattering diagrams, Part I. Basics in cluster algebras*, 2022, draft for a monograph, arXiv:2201.11371 [math.CO].
- [Nak22b] ———, *Pentagon relation in quantum cluster scattering diagrams*, 2022, arXiv:2202.01588 [math.QA].

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計15件（うち査読付論文 15件/うち国際共著 8件/うちオープンアクセス 15件）

1. 著者名 Michael Gekhtman, Tomoki Nakanishi	4. 巻 なし
2. 論文標題 Asymptotic sign coherence conjecture	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Experimental Mathematics	6. 最初と最後の頁 なし
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/10586458.2019.1650401	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Tomoki Nakanishi	4. 巻 103
2. 論文標題 Synchronicity phenomenon in cluster patterns	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 J. London Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 1120--1152
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/jlms.12402	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Tomoki Nakanishi	4. 巻 70
2. 論文標題 Rogers dilogarithms of higher degree and generalized cluster algebras	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Jour. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 1269, 1304
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/75767576	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 A. Kuniba, H. Lyu, M. Okado	4. 巻 937
2. 論文標題 Randomized box-;ball systems, limit shape of rigged configurations and thermodynamic Bethe ansatz	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Nucl. Phys. B	6. 最初と最後の頁 240, 271
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.nuclphysb.2018.10.008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 A. Kuniba	4. 巻 14
2. 論文標題 Tetrahedron Equation and Quantum R Matrices for q-Oscillator Representations Mixing Particles and Holes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 SIGMA	6. 最初と最後の頁 67
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2018.067	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Michael Gekhtman, Tomoki Nakanishi, Dylan Rupel	4. 巻 2
2. 論文標題 Hamiltonian and Lagrangian formalisms of mutations in cluster algebras and application to dilogarithm identities	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Integrable Syst.	6. 最初と最後の頁 1, 35
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/integr/xyx005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 A. Kuniba, M. Okado and S. Watanabe	4. 巻 13
2. 論文標題 Integrable structure of multispecies zero range process	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 SIGMA	6. 最初と最後の頁 44
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2017.044	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 A. Kuniba, V. V. Mangazeev	4. 巻 922
2. 論文標題 Density and current profiles in $U_q(A^{(1)}_2)$ zero range process	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Nucl. Phys. B	6. 最初と最後の頁 148, 185
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.nuclphysb.2017.07.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 A. Kuniba, M. Okado	4. 巻 107
2. 論文標題 A q-boson representation of Zamolodchikov-Faddeev algebra for stochastic R matrix of $U_q(A^{(1)}_n)$	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Lett. Math. Phys.	6. 最初と最後の頁 1111, 1130
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11005-016-0934-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 M. Okado, R. Sakamoto, A. Schilling and T. Scrimshaw	4. 巻 46
2. 論文標題 Type $D_n^{(1)}$ rigged configuration bijection	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Algebr. Comb.	6. 最初と最後の頁 341, 401
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10801-017-0756-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Tomoki Nakanishi, Dylan Rupel	4. 巻 24
2. 論文標題 Companion cluster algebras to a generalized cluster algebra	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Travaux mathematiques	6. 最初と最後の頁 129-149
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Atsuo Kuniba, Shouya Maruyama, Masato Okado	4. 巻 1
2. 論文標題 Multispecies totally asymmetric zero range process: I. Multiline process and combinatorial R	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 J. Integrable Syst.	6. 最初と最後の頁 xyw002
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/integr/xyw002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Atsuo Kuniba, Shouya Maruyama, Masato Okado	4. 巻 1
2. 論文標題 Multispecies totally asymmetric zero range process:II. Hat relation and tetrahedron equation	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 J. Integrable Syst.	6. 最初と最後の頁 xyw008
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/integr/xyw008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Atsuo Kuniba, Shouya Maruyama, Masato Okado	4. 巻 164
2. 論文標題 Inhomogeneous Generalization of a Multispecies Totally Asymmetric Zero Range Process	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 J. Stat. Phys.	6. 最初と最後の頁 952-968
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10955-016-1555-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kuniba A., Mangazeev, Maruyama S, Okado M	4. 巻 913
2. 論文標題 Stochastic R matrix for $U_q(A(1)_n)$	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Nucl. Phys.	6. 最初と最後の頁 248-277
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.nuclphysb.2016.09.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計13件(うち招待講演 13件/うち国際学会 10件)

1. 発表者名 Tomoki Nakanishi
2. 発表標題 Cluster scattering diagrams
3. 学会等名 Combinatorial representation theory and related subjects, RIMS (online) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Tomoki Nakanishi
2. 発表標題 Cluster patterns and scattering diagrams
3. 学会等名 Cluster Algebras and Related Topics, Morningside Center of Mathematics, Beijing, China/online (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 中西知樹
2. 発表標題 団代数・ルート系・散乱図式
3. 学会等名 日本数学会・企画特別講演, 慶應大(online) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Tomoki Nakanishi
2. 発表標題 Dilogarithm identities in cluster algebras from Hamiltonian/Lagrangian point of view
3. 学会等名 Cluster Algebras and Mathematical Physics (CAMP), Michigan State University, East Lansing, USA (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tomoki Nakanishi
2. 発表標題 Cluster Algebras and Dilogarithm identities
3. 学会等名 School on Cluster Algebras, ICTS, Bangalore, India (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tomoki Nakanishi
2. 発表標題 Rogers dilogarithms of higher degree and generalized cluster algebras
3. 学会等名 Development of Moduli Space and Hyperbolic Geometry, Tokyo Univerisity (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tomoki Nakanishi
2. 発表標題 Dilogarithm identities in cluster algebras from Hamiltonian/Lagrangian point of view
3. 学会等名 International Workshop on Cluster Algebras and Related Topics, Chern Institue of Mathematics, Nankai University, Tianjin, China (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tomoki Nakanishi
2. 発表標題 Periodicities of x- and y-variables in cluster algebras
3. 学会等名 Cluster Algebras: Twenty Years On, Centre International de Rencontres Mathematiques, Luminy, France (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tomoki Nakanishi
2. 発表標題 Generalized cluster algebras and dilogarithms of higher degree
3. 学会等名 5TH Workshop on Cominatorics of Moduli Spaces, Hurwitz Numbers and Cohomological Field Theories (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Tomoki Nakanishi
2. 発表標題 On generalized cluster algebras
3. 学会等名 International Conference Symmetries and Integrability of Difference Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Tomoki Nakanishi
2. 発表標題 Dilogarithm identities in cluster algebras from Hamiltonian/Lagrangian point of view
3. 学会等名 Quivers, Cluster Algebras and Mathematical Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Tomoki Nakanishi
2. 発表標題 Dilogarithm identities in cluster algebras from Hamiltonian/Lagrangian point of view
3. 学会等名 Frontiers in mathematical physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tomoki Nakanishi
2. 発表標題 Dilogarithm identities in cluster algebras from Hamiltonian/Lagrangian point of view
3. 学会等名 Spring school: Cluster Algebras in Mathematical Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~nakanisi/index.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	国場 敦夫 (Kuniba Atsuo) (70211886)	東京大学・大学院総合文化研究科・教授 (12601)	
研究分担者	尾角 正人 (Okado Masato) (70221843)	大阪市立大学・大学院理学研究科・教授 (24402)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計5件

国際研究集会 Infinite Analysis 18 Spring School: R-matrices, Cluster Algebras, and Integrable Systems, Integrable Hierarchies and Beyond, Nagoya University, May 22-24, 2018, Nagoya, Japan	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 Infinite Analysis 19 Workshop: Quantum Symmetries and Integrable Systems, Tokyo University, Komaba, March 5-7, 2019, Tokyo, Japan	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Algebraic and Combinatorial Aspects in Integrable Systems, Integrable Hierarchies and Beyond, Osaka City University	開催年 2017年～2017年
国際研究集会 Infinite Analysis 16 Summer School Integrable Hierarchies and Beyond	開催年 2016年～2016年
国際研究集会 Infinite Analysis 21 Workshop: Around Cluster Algebras, online	開催年 2021年～2021年

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------