

令和 5 年 6 月 1 日現在

機関番号：17102  
研究種目：基盤研究(B)（一般）  
研究期間：2016～2020  
課題番号：16H03927  
研究課題名（和文）モックモジュラー形式と量子不変量の研究とその応用  
  
研究課題名（英文）Studies on Mock Modular Forms and Quantum Invariants  
  
研究代表者  
樋上 和弘（Hikami, Kazuhiro）  
  
九州大学・数理学研究院・准教授  
  
研究者番号：60262151  
交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 7,900,000円

研究成果の概要（和文）：現代では、モックモジュラー形式は調和マース形式の正則部分として定義される。Ramanujanのモックテータ関数は重み $1/2$ の例である。もともとは整数の分割数との関連が深く数論の研究対象であったが、量子不変量との関係があることが明らかにされ量子トポロジーおよび数理物理分野での重要性が増している。本研究においては、クラスター代数や二重アフィン・ヘッケ代数などを用いた量子不変量の新たな構成、量子不変量の多変数化、量子モジュラー形式との関係などを明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義  
量子トポロジーの研究は、量子計算、特にトポロジカル量子計算の応用研究につながる。結び目や3次元多様体の量子不変量の性質、特にモジュラー形式との関係ははじめ数論的性質を明らかにしようとする研究課題は比較的新しいものであり、今後の応用・発展につながることを期待できる。

研究成果の概要（英文）：A mock modular form is defined as a holomorphic part of the harmonic Maass forms. A typical example is the Ramanujan mock theta function, which has a weight  $1/2$  mock modular form. It is originally related to the integer partition. Recently it is recognized that mock modular form plays an important role in quantum topology. In the present research, we studied quantum modular form by use of the cluster algebra and the double affine Hecke algebra, and clarified new aspects of quantum invariants.

研究分野：数理物理

キーワード：数理物理 量子トポロジー モジュラー形式

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

モックモジュラー形式は、Hardy に宛てた Ramanujan の最後の手紙を発端とする。数学的な構造は 100 年近くにわたって未解明であったが、Zwegers によって調和マース形式の正則部分であるとの特徴付けがなされた。これ以降急速に研究が進んでおり、さまざまな分野でモックモジュラー形式が用いられるようになった。例えば、K3 曲面の楕円種数を超共形場理論の指標で展開することによって得られるモックテータ関数が有限群の表現と関係するとのマシュー・ムーンシャイン現象、また結び目・3次元多様体の量子不変量の 1 の冪根での振る舞いがモックモジュラー形式と似ていること、などが挙げられる。

### 2. 研究の目的

前項で述べた分野だけでなく、他にも様々な分野でモックモジュラー形式の重要性が増していくものと考えられる。本研究では、クラスター代数やダブルアフィンヘッケ環などの表現論的な手法を用いた研究を行う。特に量子不変量への応用研究を行う。モックモジュラー形式に関わる幾何的・物理的背景を探り、さまざまな観点から総合研究を行う。

### 3. 研究の方法

本研究にはトポロジー、表現論、弦理論など諸分野の専門家が分担研究者として参画している。種々の観点を融合させることによって、さまざまな観点からモックモジュラー形式の総合的研究を行う。

### 4. 研究成果

以下、国際雑誌に発表した研究成果をテーマ別に述べる。

- (a) トーラス結び目の色つきジョーンズ多項式や、ザイフェルト多様体のウィッテン・レシェティヒン・ツウラエフ(WRT)不変量は、モックモジュラー形式と密接な関係があることが知られている。一般に、結び目不変量はパラメータ  $q$  のローラン多項式であり、また 3次元多様体の不変量はパラメータ  $q$  が 1 の冪根の場合にのみ定義される。これらが  $q$  級数で表されるモックモジュラー形式の特殊値と一致する場合がある。海外共同研究者 Jeremy Lovejoy との研究によって、トーラス結び目  $T(2, 2t+1)$  のデーネ手術から得られるザイフェルト多様体の WRT 不変量について、ヘッケ型  $q$  級数との関係を明らかにし、モジュラー性の解析を行った。
- (b) 結び目および 3次元多様体の非半単純な量子不変量が注目を集めている。結び目においては阿久津・出口・大槻(ADO)不変量、3次元多様体においては Costantino-Geer-Patureau(CGP)不変量が非半単純な量子不変量の例である。物理的には、これらが量子 3次元多様体の圏化において重要な役割を果たすと期待されている。結び目の量子不変量の表示方法として葉廣のサイクロトミック展開と呼ばれるものがある。パラメータ  $q$  が 1 の冪根のときの極限值やデーネ手術による 3次元多様体の量子不変量の構成に便利である。実際に 2重捻れ結び目について、葉廣展開において  $q$  を 1 の原始  $p$  根に特殊化によって ADO 不変量が現れることを Beliakova との共同研究において具体的に示した。また、2重捻れ結び目から構成される多様体の CGP 不変量についても解析し、WRT 不変量との比較を行った。
- (c) コバノフの圏化多項式のように、結び目・3次元多様体の量子不変量を多変数化することによって量子不変量のより詳細な構造が明らかになる。モックモジュラー形式の観点からはモックヤコビ形式への拡張が期待される。二重アフィンヘッケ代数(DAHA)は Cherednik によって導入されたものでルート系に関連する Macdonald 多項式の研究において重要な道具である。Macdonald 多項式は数学や物理学の様々な分野で広く使われ、量子ホール効果の波動関数の  $q$ -変形としても解釈できることからトポロジカルオーダーの研究においても有益であると期待されている。量子不変量の立場では、DAHA は曲面上の Kauffman スケイン代数と密接な関連を持つ。C1 型

の DAHA は 4 つの穴のある球面の特性多様体の量子化を記述し、また A1 型の DAHA は一つの穴のあるトーラスの特性多様体を記述する。A1 型と C1 型の DAHA を組み合わせることによって、種数 2 トーラス上のスケイン代数を記述する DAHA の構成を試みた。種数 2 のトーラス上の単純閉曲線で記述される結び目は、ツイスト結び目などの多くの結び目がこのタイプに属している。DAHA の自己同型を用いることによって、これら種数 2 トーラス上の閉曲線であらわされる結び目の多変数不変量を構成し、色つき Jones 多項式との関係を明らかにした。

- (d) モックモジュラー形式の量子トポロジーにおける役割をさらに発展させるためには、新たな観点からの研究が重要であると考えられる。3次元双曲多様体の研究において重要な二重対数関数がクラスター代数においても表れることもあり、クラスター代数は有力な手法の一つであると思われる。量子不変量における基本的なスケイン代数を 1 点穴あきトーラス上および 4 点穴あき球面上で具体的に構成し、クラスター代数を用いた代数多様体上のポアソン構造の解析を試みた。クラスター代数の結び目理論への応用のひとつとして Bonahon-Wong のトレース写像が挙げられる。一つの穴のあるトーラスと 4 つの穴のある球面の特性多様体に注目し、クラスター代数を用いて性質を調べた。特に、クラスター変異を使用して  $PGL(2; \mathbb{Z})$  自己同型群の作用を構成した。4 つの穴のある球面の特性多様体は、Painlevé VI 方程式のモノドロミー保存変換と関連しており、その退化過程をクラスター代数を用いて再解釈した。理想三角分割の退化に関連するクラスター代数を提案し、Painlevé VI 方程式の融合との関係を明らかにした。また、量子クラスター代数を使用して、特性多様体の量子化を考察した。量子特性多様体の数学的構造を解明することによって、結び目不変量への応用を探った。
- (e) トーラス結び目の一般化について Reidemeister トーションの解析を行い、色つき Jones 多項式の漸近形からどのように現れるかを明らかにした。
- (f) 行列模型の手法を用いてコード図形の性質を調べた。コード図形は RNA 分子の二次構造や擬結び構造の特性の表現にも使用される。特に、RNA の結び構造の研究にヒントを得て、コード図形を表す行列模型を新たに構成した。この変形版を研究し、コード図形との関係を明らかにした。
- (g) 量子不変量の基本構成要素は R 行列である。クラスター代数を用いて円筒上の三角格子の変異の列としてクラスター-R-行列を定義し、量子アフィン代数  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$  の対称べき表示のアフィン幾何学的 R-行列を構成した。量子不変量への応用のため、量子ループ対称関数を構築した。

本研究課題の補助を受けて国際研究集会を 2 件開催した。研究期間最終年度にも開催予定であったが、コロナ禍によって中止せざるを得なかったことは残念である。

- モックモジュラー形式に関する国際研究集会「School on Mock Modular Forms and Related Topics」を九州大学において伊吹山氏・金子氏とともに 2016 年 11 月に開催した。第一線で活躍する 3 名の海外研究者を講師として迎え、40 名以上の参加者による活発な議論がもたれた。
- 国際研究集会「Modular Forms and Quantum Knot Invariants」を J.Lovejoy, R.Osburn とともに Banff International Research Station (カナダ) にて 2018 年 3 月に開催した。数論、トポロジー、弦理論のさまざまな分野の研究者が世界各国より約 40 名集まり、活発な議論が行われた。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 11件／うち国際共著 5件／うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Kazuhiro Hikami	4. 巻 109
2. 論文標題 DAHA and skein algebra on surfaces: double-torus knots	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 2305--2358
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11005-019-01189-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hitoshi Murakami	4. 巻 257
2. 論文標題 The twisted Reidemeister torsion of an iterated torus knot	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Topology and Applications	6. 最初と最後の頁 22--66
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topol.2019.02.012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hiroyuki Fuji, K. Iwaki, M. Manabe, I. Satake	4. 巻 371
2. 論文標題 Reconstructing GKZ via topological recursion	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 839-920
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-019-03590-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Rei Inoue, T. Lam, P. Pylyavskyy	4. 巻 55
2. 論文標題 On the cluster nature and quantization of geometric R-matrices	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Publ. RIMS Kyoto Univ.	6. 最初と最後の頁 25--78
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/PRIMS/55-1-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kazuhiro Hikami	4. 巻 15
2. 論文標題 Note on character varieties and cluster algebras	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)	6. 最初と最後の頁 003 (32 pages)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2019.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hitoshi Murakami	4. 巻 257
2. 論文標題 The twisted Reidemeister torsion of an iterated torus knot.	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Topology App.	6. 最初と最後の頁 22- -66
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2019.02.012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Hikami and J. Lovejoy	4. 巻 11
2. 論文標題 Hecke-type formulas for families of unified Witten-Reshetikhin-Turaev invariants	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Communications in Number Theory and Physics	6. 最初と最後の頁 249-272
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/CNTP.2017.v11.n2.a1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Tamas and H. Murakami	4. 巻 8
2. 論文標題 Root polytopes, parking functions, and the HOMFLY polynomial	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Quantum Topology	6. 最初と最後の頁 205-248
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/QT/89	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 J. E. Andersen, H. Fuji, R.C. Penner, C. Reidys	4. 巻 25
2. 論文標題 The boundary length and point spectrum enumeration of partial chord diagrams using cut and join recursion	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Travaux mathematiques	6. 最初と最後の頁 213--232
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 J.E. Andersen, H. Fuji, M. Manabe, R.C. Penner, P. Sulkowski	4. 巻 25
2. 論文標題 Enumeration of chord diagrams via topological recursion and quantum curve techniques	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Travaux mathematiques	6. 最初と最後の頁 285--323
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 A. Beliakova, K. Hikami	4. 巻 33
2. 論文標題 Non-semisimple invariants and Habiro's Series	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics	6. 最初と最後の頁 161--174
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/IRMA/33-1/10	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計18件 (うち招待講演 18件 / うち国際学会 15件)

1. 発表者名 Hitoshi Murakami
2. 発表標題 Introduction to the volume conjecture for knots
3. 学会等名 Frontiers in Mathematical Sciences Research Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kazuhiro Hikami
2. 発表標題 DAHA and skein algebras on surfaces
3. 学会等名 Workshop on Quiver Hecke algebra and its Applications to Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 藤博之
2. 発表標題 RNAを表現するファットグラフモデルと行列模型
3. 学会等名 名古屋大学多元数理科学研究科談話会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kazuhiro Hikami
2. 発表標題 On Kauffman bracket skein algebra and DAHA
3. 学会等名 Volume Conjecture in Tokyo (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 村上斉
2. 発表標題 位相的場の理論に由来する3次元多様体の不変量 (MOOとWRT)
3. 学会等名 Summer School 数理物理2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hitoshi Murakami
2. 発表標題 The volume conjecture for cable knots
3. 学会等名 Volume Conjecture in Tokyo (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hitoshi Murakami
2. 発表標題 An Introduction to the Volume Conjecture and its generalizations, I, II, and III
3. 学会等名 The volume conjecture for knots (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hitoshi Murakami
2. 発表標題 Volume conjecture for knots
3. 学会等名 Quantum Symmetries and Integrable Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroyuki Fuji
2. 発表標題 Reconstructing GKZ via topological recursion
3. 学会等名 Physics Seminar at Korea Institute of Advanced Study (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Rei Inoue
2. 発表標題 Networks on surfaces and integrable systems
3. 学会等名 Infinite Analysis 18 Spring School (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kazuhiro Hikami
2. 発表標題 Quantum invariants for knots/3-manifolds and modular forms
3. 学会等名 Trends in Modular Forms (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kazuhiro Hikami
2. 発表標題 Quantum modular forms I, II
3. 学会等名 Indefinite Theta Functions and Applications in Physics & Geometry, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kazuhiro Hikami
2. 発表標題 q-series and quantum invariants
3. 学会等名 Frontiers in Mathematical Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kazuhiro Hikami
2. 発表標題 Quantum modular form from knots and 3-manifolds
3. 学会等名 Number Theory and Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 H. Murakami
2. 発表標題 Colored Jones polynomial and $SL(2;C)$ representations of a knot group
3. 学会等名 Knots in Hellas 2016 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Rei Inoue
2. 発表標題 The cluster structure of geometric R-matrices
3. 学会等名 Combinatorics of Moduli Spaces, Hurwitz Numbers, Cohomological Field Theories (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Rei Inoue
2. 発表標題 Cluster braiding operator and Kashaev's R-matrix
3. 学会等名 Volume Conjecture and Quantum Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 H. Fuji
2. 発表標題 Partial chord diagrams and matrix models
3. 学会等名 The Algebra and Geometry of Modern Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 村上斉	4. 発行年 2019年
2. 出版社 岩波書店	5. 総ページ数 342
3. 書名 結び目理論入門(上)	

1. 著者名 Hitoshi Murakami and Yoshiyuki Yokota	4. 発行年 2018年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 129
3. 書名 Volume Conjecture for Knots	

〔産業財産権〕

〔その他〕

School on Mock Modular Forms and Related Topics <a href="https://sites.google.com/site/mmfschool2016/">https://sites.google.com/site/mmfschool2016/</a>
--

## 6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	村上 斉 (Murakami Hitoshi) (70192771)	東北大学・情報科学研究科・教授  (11301)	
研究分担者	藤 博之 (Fuji Hiroyuki) (50391719)	大阪工業大学・情報科学部・教授  (34406)	
研究分担者	山崎 玲(井上玲) (Inoue Rei) (30431901)	千葉大学・大学院理学研究院・教授  (12501)	

## 7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Modular Forms and Quantum Knot Invariants	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 School on Mock Modular Forms and Related Topics	開催年 2016年～2016年

## 8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	CNRS			
スイス	University of Zurich			