

令和 4 年 6 月 10 日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2016～2020

課題番号：16H03931

研究課題名(和文)幾何学的量子表現と反復積分および位相場の理論への応用の研究

研究課題名(英文) Geometric quantum representations, iterated integrals and applications to topological field theory

研究代表者

河野 俊丈 (Kohno, Toshitake)

明治大学・総合数理学部・専任教授

研究者番号：80144111

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,800,000円

研究成果の概要(和文)：組みひも群のホモロジー表現は、点付き円板の写像類群としての、配置空間のアーベル被覆のホモロジー群への作用として定義され、Krammer, Bigelowらによって研究された。KZ方程式の解の超幾何関数による積分表示を用いて、組みひも群のホモロジー表現とKZ方程式のモノドロミー表現との関連を明らかにした。共形場理論の場合は共形ブロックへの組みひも群の表現は量子群の1のベキ根における表現の対称性をもつ。この場合に、積分サイクルの構造を詳しく調べて、KZ方程式が、代数多様体の周期積分の満たす微分方程式として表されること、つまり、Gauss-Manin接続として表示されることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

組みひも群、曲面の写像類群の幾何学的量子表現の理論をより深化させて、幾何学的群論などの問題にフィードバックしていくことが期待される。本研究によって、量子位相不変量についての幾何学的な理解が深まり、曲面結び目の不変量を構成するなどの成果を挙げ、低次元トポロジーの新しい研究手法がもたらされた。また離散群のユニタリ表現の組織的な構成方法が与えられ、これは量子計算の基礎に寄与するものである。

研究成果の概要(英文)：Homological representations of braid groups are defined as the action of homeomorphisms of a punctured disk on the homology of an abelian covering of its configuration space. These representations were extensively studied by Krammer and Bigelow. I described a relation between homological representations of braid groups and the monodromy representations of KZ connections based on solutions of the KZ equation expressed by hypergeometric integrals. I also studied the case of resonance at infinity appearing in conformal field theory and investigated the structure of integration cycles. In this case I described the symmetry by quantum groups at roots of unity. I showed that the KZ equation is represented as a differential equation satisfied by period integrals for certain algebraic varieties, and is expressed as a Gauss-Manin connection.

研究分野：位相幾何学，数理物理

キーワード：量子群 共形場理論 超幾何積分 反復積分 組みひも群

1. 研究開始当初の背景

近年の幾何学と数理解物理学の相互作用の一つの側面として、Jones 多項式の発見を契機とした位相幾何学と共形場理論などに関わる新たな潮流が挙げられる。Jones 多項式は、当初は作用素環論の枠組みで発見されたが、KZ 方程式のモノドロミー表現を用いても構成され、研究代表者と Drinfeld によるモノドロミー表現の量子群による対称性の研究により、共形場理論、量子群の表現論などとの関係が明らかにされた。また、Witten によって、Chern-Simons ゲージ理論の分配関数として、Jones 多項式が 3 次元多様体の位相不変量に拡張されることが提唱され、それは、Reshetikhin-Turaev による量子群の 1 のベキ根における表現論を用いた Dehn 手術による記述、研究代表者による、多様体の Heegaard 分解と共形場理論に現れる写像類群の表現を用いた構成として、数学的に確立した。一方、研究代表者による KZ 方程式のモノドロミー表現の反復積分による記述は、結び目に対する Kontsevich 積分として発展し、Vassiliev による研究を発端とする、有限型位相不変量の研究が活発に行われるようになった。Le-Murakami-Ohtsuki により、Drinfeld associator を用いた Kontsevich 積分の記述から、ホモロジー 3 球面の有限型位相不変量が組織的に構成され、これは LMO 不変量とよばれ、量子位相不変量の研究を発展させた。また、配置空間のアーベル被覆のホモロジーへの組みひも群の作用として、Bigelow と Krammer によって組みひも群が線形群に埋め込めることが証明された。研究代表者は、このようなホモロジー表現と KZ 方程式のモノドロミー表現との関係を、超幾何積分を用いた記述により明らかにした。現在、結び目と 3 次元多様体の位相不変量の理論は Khovanov ホモロジーによる Jones 多項式の圏化、シンプレクティック幾何学を用いた、Heegaard-Floer ホモロジーの構成など新たな段階を迎えている。本研究では、K.-T. Chen による反復積分の理論に現れる、ホモロジー接続の理論を用いて、多様体の高次の homotopy groupoid の表現論を構成し、その応用として、組みひも間のコボルディズムのなす、2-category の表現を構成することをめざした。

2. 研究の目的

1980 年代半ばの Jones 多項式の発見以降、結び目と 3 次元多様体の位相不変量の研究に関する新たな手法が発展し、位相幾何学のみならず、作用素環論、量子群の表現論、共形場理論、可解格子模型などの数理解物理学の分野、数論におけるガロア表現など広範な領域と関わって発展してきた。特に、研究代表者と Drinfeld による、KZ 方程式のモノドロミー表現の量子群による対称性は、この分野の発展を牽引してきた。本研究では、モノドロミー表現を高次の圏に拡張して、組みひも間のコボルディズムの表現に応用すること、さらに、このような表現の配置空間のラグランジュ部分多様体が表すサイクルへの作用ととらえて、組みひも群のモノドロミー表現とラグランジュ多様体から構成される A 無限大圏への作用との関係を明らかにすることを目的とする。

3. 研究の方法

研究代表者は、組みひも群と写像類群の幾何学的表現論、共形ブロックの空間の周期積分による表示の研究を行い、反復積分の理論を用いて、位相場の理論の枠組みの高次の圏への拡張をめざして、本研究を統括した。研究分担者、逆井卓也は森田茂之らと共同で、曲面の写像類群のコホモロジー群および Johnson 準同型などに代表される写像類群の表現論およびリーマン面のモジュライ空間の幾何学の研究において優れた業績を挙げている。ここでは Kontsevich によって展開された形式的シンプレクティック幾何学の理論および微分リー代数の手法が用いられている。本研究における共形場の理論においては、リーマン面のモジュライ空間の幾何学および写像類群の表現論が不可欠であり、その観点から本研究を推進した。また、逆井卓也は、研究代表者と東京大学におけるトポロジー火曜セミナーを共同で運営する。研究分担者、加藤晃史は、寺嶋郁二と共同で、quiver とよばれるグラフの分配関数においてクラスター代数などの手法を用いた著しい成果を挙げている。また、加藤晃史は、弦理論などに代表される現在の数理解物理学の発展に精通しており、位相場の理論の構成の観点から本研究に参画した。

4. 研究成果

組みひも群のホモロジー表現は、点付き円板の写像類群としての、配置空間のアーベル被覆のホモロジー群への作用として定義され、Krammer, Bigelow らによって研究された。KZ 方程式の解の超幾何関数による積分表示を用いて、組みひも群のホモロジー表現と KZ 方程式のモノドロミー表現との関連を明らかにした。共形場理論の場合は無限遠でレゾナントであり、共形ブロックへの組みひも群の表現は量子群の 1 のベキ根における表現の対称性をもつ。この場合に、積分サイクルの構造を詳しく調べて、KZ 方程式が、代数多様体の周期積分の満たす微分方程式として表されること、つまり、Gauss-Manin 接続として表示されることを示した。多様体の基本群の線形表現は、平坦ベクトル束のモノドロミー表現と対応するが、この構成を、高次圏に拡張する研究を行なった。具体的には、K.-T. Chen による形式的ホモロジー接続を用いて、高次のホモ

トピー亜群の高次圏としての表現に拡張した。特に、超平面配置について、形式的ホモロジー接続を具体的に記述し、超平面配置の補集合の2次ホモトピー型について調べた。また、配置空間の場合に、高次のKZ接続を定義し、さらに、これまでに得られていたKZ方程式のモノドロミー表現と量子群との関係を高次圏に拡張することについて研究した。応用として組みひもコホモロジーのなす圏の表現を構成し、Kontsevich積分の2次の圏への拡張として、曲面組みひもとよばれる4次元空間内の曲面の位相不変量を定義した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Toshitake Kohno	4. 巻 1
2. 論文標題 Higher holonomies for hyperplane arrangements	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-23
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40879-019-00382-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Sakasai, S. Morita and M. Suzuki	4. 巻 未定
2. 論文標題 Morita's trace maps on the group of homology cobordisms	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Quantum Topology	6. 最初と最後の頁 未定
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshitake Kohno	4. 巻 2
2. 論文標題 Configuration spaces, KZ connections and conformal blocks	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Oberwolfach Reports	6. 最初と最後の頁 52--54
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/OWR/2018/2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 逆井卓也	4. 巻 70-3
2. 論文標題 曲面の写像類群と自由群の外部自己同型群のコホモロジーに関するこれまでの歩みと最近の進展	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 数学 (日本数学会)	6. 最初と最後の頁 225--254
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Gwenael Massuyeau, Takuya Sakasai	4. 巻 未定
2. 論文標題 Morita's trace maps on the group of homology cobordisms	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Topology and Analysis	6. 最初と最後の頁 未定
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S179352531950064X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Toshitake Kohno	4. 巻 72
2. 論文標題 Quantum representations of braid groups and holonomy Lie algebras	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 117-144
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshitake Kohno	4. 巻 19
2. 論文標題 Homological representations of braid groups and the space of conformal blocks	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Springer INdAM Series	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-58971-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takuya Sakasai, Shigeyuki Morita, Masaaki Suzuki	4. 巻 B66
2. 論文標題 Symmetry of symplectic derivation Lie algebras of free Lie algebras	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 185-193
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takuya Sakasai	4. 巻 3
2. 論文標題 Johnson-Morita theory in mapping class groups and monoids of homology cobordisms of surfaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Winter Braids Lecture Notes	6. 最初と最後の頁 1-25
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Akishi Kato, Yuma Mizuno, Yuji Terashima	4. 巻 108
2. 論文標題 Quiver Mutation Sequences and q-Binomial Identities	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnx108	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshitake Kohno	4. 巻 72
2. 論文標題 Quantum representations of braid groups and holonomy Lie algebras	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 117-144
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshitake Kohno	4. 巻 26
2. 論文標題 Higher holonomy maps of formal homology connections and braid cobordisms	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218216516420074	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Sakasai, S. Morita and M. Suzuki	4. 巻 未定
2. 論文標題 An abelian quotient of the symplectic derivation Lie algebra of the free Lie algebra	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Experimental Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計28件 (うち招待講演 27件 / うち国際学会 18件)

1. 発表者名 Toshitake Kohno
2. 発表標題 Higher holonomy maps and iterated integrals
3. 学会等名 New trends in geometry and mathematical physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toshitake Kohno
2. 発表標題 Mathematical forms - geometric models, lattices and crystals
3. 学会等名 Design Innovation from Nature Symposium, UC Berkeley (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toshitake Kohno
2. 発表標題 Higher holonomy maps and iterated integrals
3. 学会等名 Japan-Australia Symposium "Hyperplane Arrangements and Singularities" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuya Sakasai
2. 発表標題 Computations on Johnson homomorphisms and their applications
3. 学会等名 Computational Problems in Low-dimensional Topology II (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuya Sakasai
2. 発表標題 Computations in symplectic derivation Lie algebras and their applications
3. 学会等名 Graph complexes in algebraic geometry and topology, The University of Manchester (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toshitake Kohno
2. 発表標題 Higher category extensions of holonomy maps and iterated integrals
3. 学会等名 Higher structures in algebra, geometry and quantum field theory, University of Hamburg (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toshitake Kohno
2. 発表標題 Mathematical forms - collection of geometric models at the University of Tokyo
3. 学会等名 Tokyo-Berkeley Symposium "Forms in Nature and Art" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toshitake Kohno
2. 発表標題 Quantum symmetry in homological representations of braid groups
3. 学会等名 East Asian Conference on Geometric Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toshitake Kohno
2. 発表標題 Higher category extensions of KZ connections and representations of braid cobordisms
3. 学会等名 101e rencontre entre mathematically et physiciens theoriciens, IRMA, Strasbourg (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 逆井卓也
2. 発表標題 グラフホモロジーとモジュライ空間のホモロジー群
3. 学会等名 種々の幾何学的構造と基本群に現れる様々な特性類とその不変量への応用 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuya Sakasai
2. 発表標題 Computations on Johnson homomorphisms
3. 学会等名 Cohomological study of mapping class groups and related topics, IRMA (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 加藤晃史
2. 発表標題 力学の変遷 古典・量子・弦
3. 学会等名 日本数学会 市民講演会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toshitake Kohno
2. 発表標題 Higher category extensions of holonomy maps for hyperplane arrangements
3. 学会等名 Arrangements and beyond: Combinatorics, geometry, topology and applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Toshitake Kohno
2. 発表標題 Representations of the category of braid cobordisms
3. 学会等名 Self-distributive system and quandle (co)homology theory in algebra and low-dimensional topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Toshitake Kohno
2. 発表標題 Local systems on configuration spaces, KZ connections and conformal blocks
3. 学会等名 Topology of Arrangements and Representation Stability, Oberwolfach (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Toshitake Kohno
2. 発表標題 Higher category extensions of holonomy maps and representations of braid cobordims
3. 学会等名 The 13th Algebra-Analysis-Geometry Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Akishi Kato
2. 発表標題 Quiver mutation loops and partition q-series
3. 学会等名 リーマン面に関連する位相幾何学 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takuya Sakasai
2. 発表標題 Cohomology of the moduli space of graphs and groups of homology cobordisms of surfaces
3. 学会等名 Geometric Topology Fair 2017, KAIST (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takuya Sakasai
2. 発表標題 Johnson homomorphisms and symplectic representation theory
3. 学会等名 ジョンソン準同型とその周辺, 東京大学 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takuya Sakasai
2. 発表標題 Invariants of homology cobordisms of surfaces
3. 学会等名 Tsuda University Topology Workshop (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 逆井卓也
2. 発表標題 自由群の acyclic closure とその自己同型群について
3. 学会等名 ストリングトポロジーとその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Toshitake Kohno
2. 発表標題 Higher category extensions of holonomy maps for hyperplane arrangements
3. 学会等名 Summer Conference on Hyperplane Arrangements (SCHA) in Sapporo (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Toshitake Kohno
2. 発表標題 Higher category extensions of the holonomy maps of KZ connections
3. 学会等名 Workshop on Grothendieck-Teichmüller Theories (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Takuya Sakasai
2. 発表標題 Cohomology of the moduli space of graphs and groups of homology cobordisms of surfaces
3. 学会等名 離散群と双曲空間のトポロジーと解析 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Takuya Sakasai
2. 発表標題 Topological approaches to Mumford-Morita-Miller classes
3. 学会等名 MCM 2016 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Takuya Sakasai
2. 発表標題 An abelian quotient of the symplectic derivation Lie algebra of the free Lie algebra
3. 学会等名 トポロジーとコンピュータ 2016 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Takuya Sakasai
2. 発表標題 On the dihedral invariant Lie subalgebra of the associative symplectic derivation Lie algebra
3. 学会等名 GD2016---微分同相群と離散群 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Akashi Kato
2. 発表標題 Quiver mutation loops and partition q-series-Tropical geometry and related topics
3. 学会等名 日本数学会年会無限可積分セッション特別講演(招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 河野 俊丈	4. 発行年 2021年
2. 出版社 東京大学出版会	5. 総ページ数 328
3. 書名 曲率とトポロジー	

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>Toshitake Kohno's Homepage https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kohno/ Toshitake Kohno's Homepage http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kohno/ Toshitake Kohno's Home Page http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kohno/ Toshitake Kohno's Home Page http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kohno/</p>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	加藤 晃史 (Kato Akishi) (10211848)	東京大学・大学院数理科学研究科・准教授 (12601)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	逆井 卓也 (Sakasai Takuya) (60451902)	東京大学・大学院数理科学研究科・准教授 (12601)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計7件

国際研究集会 Japan-Australia Symposium "Hyperplan Arrangements and Singularities"	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Tokyo-Berkeley Data Science Boot Up Camp	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 Tokyo-Berkeley Symposium "Forms in Nature and Art"	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 Interdisciplinary Workshop "Mathematics and Pharmaceutical Sciences"	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Tokyo-Lyon Conference in Mathematics	開催年 2017年～2017年
国際研究集会 Berkeley-Tokyo Summer School "Geometry, Representation Theory, and Mathematical Physics"	開催年 2017年～2017年
国際研究集会 The 12th East Asian School of Knots and Related Topics	開催年 2017年～2017年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関