

令和 2 年 6 月 26 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16H03938

研究課題名(和文)無限次元解析の諸問題と確率解析の研究

研究課題名(英文) Study on several problems in infinite dimensional analysis and stochastic analysis

研究代表者

会田 茂樹 (Aida, Shigeki)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：90222455

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 6,200,000円

研究成果の概要(和文)：確率微分方程式およびラフパスで駆動される微分方程式の研究を行った。具体的には、(1)半空間の場合の反射壁の確率微分方程式を含むような経路依存方程式のオイラー近似および Wong-Zakai 近似の収束オーダーも込めた研究、(2)非整数ブラウン運動で駆動される1次元確率微分方程式の解の近似誤差分布の漸近挙動の決定、(3)一般の領域で定義された反射壁確率微分方程式や1次元ブラウン運動の場合の最大値過程を含むような perturbed reflected SDE を含むクラスのラフ微分方程式の解の存在の証明などの研究を行った。また、(2)の研究の多次元版の研究も行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

確率過程論においては、セミマルチンゲールというクラスの確率過程は基本的かつ重要であり、その解析は伊藤の確率解析としてよく知られている。しかし、一方このクラスに属さない重要な確率過程(例えば非整数ブラウン運動)も数多く、それらの確率過程の解析の重要性は様々なテクノロジーの発展とともにますます高まっている。これらの確率過程の解析においてラフパス解析は必須であり、本研究では、これらの確率過程で定まる微分方程式、Rough differential equation の解の基礎的研究を行った。

研究成果の概要(英文)：We study stochastic differential equations and rough differential equations. More precisely, the results are as follows:(1) Determination of the convergence speed of Wong-Zakai approximation solution and Euler-Maruyama solution to path-dependent SDEs including reflecting SDEs on half spaces of Euclidean spaces, (2) Determination of the asymptotic error distribution of 1-dimensional SDEs driven by fractional Brownian motion, (3) Proof of the existence of solutions to a class of path-dependent RDEs including reflected SDEs on general domains and a certain multidimensional extension of perturbed reflected SDEs. Also we study multidimensional version of the result (2).

研究分野：確率論

キーワード：確率解析 ラフパス 非整数ブラウン運動 確率微分方程式 ラフ微分方程式

1. 研究開始当初の背景

偏微分方程式への応用において、バナッハ空間などの関数空間での変分法などの非線形解析は重要な手法である。一方、確率論においては、確率微分方程式 (=SDE) の解は典型的な非線形汎関数であるが、その解析には、この通常の非線形解析だけでは不十分で、マリアバン解析やその変形、さらにはラフパス解析など新しい理論が必要である。会田は、これまでこれらの理論の基礎研究とともに無限次元空間上の作用素のスペクトル解析 (準古典極限など) を行ってきた。これを踏まえて研究計画を立てた。

2. 研究の目的

連続な道 (パス) や写像の空間、超関数の空間などの無限次元空間には、ルベグ測度のような一様測度は存在しないが、Wiener 測度・拡散測度・ガウス測度などの確率測度が存在する。本研究は確率測度に基づいたこれら無限次元空間上の関数や作用素の解析を行うことを目的とした。具体的には、無限次元空間上の関数空間で定義される 2 階微分作用素のスペクトル解析を中心に、その解析の基礎を支える

(1) 対数ソボレフ不等式に代表される関数型不等式の研究、

(2) ラフパス解析によるパスの汎関数解析、

特にラフパスで駆動される微分方程式 (Rough differential equation=RDE, ラフ微分方程式)、確率微分方程式の解の性質 (近似など) を主に研究対象とした。

3. 研究の方法

連携研究者および関連する専門家の意見を参考にしながら、研究を行った。具体的には、

(1) 問題解決に必要な図書の購入

(2) 各課題について詳しい専門家との議論

(3) 研究課題に関連する研究集会を開催し、参加者との議論

(4) 情報収集、研究成果発表のため、関連する研究集会への参加

(5) 論文作成、研究成果発表のためのノートブック型パソコンの購入などを行った。

4. 研究成果

(1) ユークリッド空間の半空間上の SDE を含むブラウン運動で駆動される伊藤の経路依存 SDE の近似の研究

(2) (1) の SDE を含む経路依存 RDE の解の存在

(3) RDE の解の近似誤差分布

の研究を行った。

(1) について説明を行う。半空間上の反射壁 SDE が経路依存 SDE と見ることができ、それにより、解の解析が行えることは、Anderson-Orey らが示している。会田は、楠岡誠一郎 (京大)、菊地孝則とともにこの SDE を含む経路依存 SDE のあるクラスを導入し、これらの SDE の近似解 (Euler-Maruyama 近似、Wong-Zakai 近似) の収束の速さを決定した。この収束の速さは先行研究などの結果から予想されたものと同じであった。

(2) について説明を行う。問題 (2) に現れる経路依存の汎関数がヘルダー連続なパス空間でリプシッツ連続性を期待できないため、RDE の場合はもちろんだが一意性を示すのが難しい問題である。実際、ブラウン運動より正則性が悪いパスに対する反射壁の RDE に対して 2020 年 1 月の Paul Gassiat のプレプリントで一意性が破れる例が報告されている。ブラウン運動で駆動された方程式の場合、確率過程がセミマルチンゲールになるため、様々な期待値の計算が可能であり、解析が容易になる。しかし、一般のラフパス、例えば非整数ブラウン運動の場合は、そのようなよい性質は無い。ラフ微分方程式の解の存在は、境界に対するある仮定の下、すでに 2015 年出版の論文で証明した。当研究では、反射壁の方程式を含む経路依存のラフ微分方程式を定式化し、2015 年の時の仮定無しで、解の存在を示した。さらに

Skorohod 方程式の解の評価を従来の物より改善した。すなわち、これまでの評価は上から指数オーダーの関数で評価していたが、この論文では、パスのヘルダー連続性の指数の逆数の高々多項式オーダーの関数で評価を与えている。このおかげで反射壁 RDE の解の評価も指数オーダーでの評価ではなく、多項式オーダーの評価に改善された。また、measurable selection theorem により構成される解に対してその位相的サポートが Stroock-Varadhan のサポート定理と同様な形で特徴づけられることも示している。証明は、RDE の解をラフパスの汎関数と見た時、滑らかなラフパスの所で連続性定理が成立することを示すことによりなされる。また、この結果をブラウン運動の反射壁 SDE の場合に適用すると、Ren-Wu により証明されていたサポート定理の別証明になっていることがわかる。先程言及した Gassiat の結果を考えると、一意性が破れる場合でも自然な解の選択が可能か、何か追加の条件を課すなどして一意性が言えないかというのは考察すべき自然な今後の課題と言える。

さらに、これまでよく研究されて来た経路依存の典型的な方程式の検討を行い、以下の結果を得た。1次元のブラウン運動（あるいはより一般に連続なパス）に過去の最大値（または最小値）過程の定数倍が足されて位置が決まる経路依存確率過程は perturbed Brownian motion, self-interacting Brownian motion と呼ばれ 1980 年代から盛んに研究されて来た。これらは Reinforced random walk などの非マルコフ的ランダムウォークの極限として現れる確率過程である。また、その拡張として、反射の効果により半空間に動きを制限された perturbed reflected Brownian motion もよく研究された対象である。これらの方程式の解の存在・非存在、不動点定理などリプシッツ連続性の議論が使えるかは最大値過程に掛かっている実数のパラメータに大きく依存する。2000 年代に入って、これらの方程式の拡散係数が定数でない確率積分を含んだ場合への拡張が英国の Zhang らを中心に研究されて来た。Zhang たちは、上述のパラメータがある範囲にある時に解の一意存在、解のマリアバンの意味での微分可能性、解の分布の滑らかさを示した。これに対して、不動点定理の議論を精密化することにより、扱えるパラメータの範囲を拡張することに成功した（木村優希との共同研究）。また、これらは 1次元のブラウン運動を駆動過程とする方程式だが、多次元でラフパスで駆動される方程式の場合についてもこれらの拡張に当たる方程式を考え解の存在を証明した。

(3) について得られた結果を説明する。確率微分方程式の場合と同様、ラフ微分方程式の場合も、オイラー近似、Milstein 近似、Crank-Nicolson 近似などの近似が存在する。

応用上からもこれらの近似過程は離散的な時間でのみ定義されることが多い。当研究では、 $[0, 1]$ に属すパラメータを導入し、これらの離散近似過程と真の過程を補間する補間離散近似過程を導入し、近似誤差を評価する研究を行った。重要な点は、補間近似過程はパラメータを含んでいるが、このパラメータに関する微分過程がよい振る舞いをするを示すことにある。この研究は阪大の永沼伸顕氏との進行中の共同研究である。

確率微分方程式の場合と同様、ラフパスで駆動される微分方程式 (=Rough differential equation, RDE と略記する) の解にも、オイラー近似、Milstein 近似、Crank-Nicolson 近似などの近似解が考えられ、応用上重要である。考えている方程式が時間区間 $[0, T]$ で定義されている場合、この区間の離散時点 $\{kT/N\}_{k=0}^N$ ($N \in \mathbb{N}$) と小区間 $[(k-1)T/N, kT/N]$ での駆動過程の増分を用いて真の解 X_t の近似解 $X_t^{(N)}$ が構成される。この近似に当たっての基本的な問題は

1. 分割を細かくした時の誤差 $X_t^{(N)} - X_t$ が 0 に収束するスピード ($N^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$) のオーダーなど) の決定
2. オーダーが α とわかった場合、正規化した誤差 $N^\alpha(X_t^{(N)} - X_t)$ の極限分布の決定

である。駆動過程がセミマルチンゲールの場合、マルチンゲール性を用いて、精細な理論が構築されている。

しかし、一般のガウス過程から定まるラフパスで駆動される RDE の場合は、マルチンゲール性を用いることができず、過去のこれらの研究成果を適用できない。

一方, 低次元のウィーナーカオスから定まる確率変数系の場合, モーメントの収束から分布の収束が従うという著しい結果 (4 次モーメント定理) が 2000 年代に Nualart, Peccati らにより得られ, 新しい中心極限定理が確立され始めた. これらの結果を用いて, 単純な 1 次元確率微分方程式の場合の研究が Nourdin らの周辺で行われた.

会田も永沼氏と共同で, Nourdin らの結果を拡張する形で 1 次元の場合に近似誤差の極限分布の決定を行った (Osaka J. Math. に掲載).

我々の関心のあるのは, 多次元の RDE の場合の正規化された近似誤差 $N^{-\alpha}(X_t^{(N)} - X_t)$ の場合に上記の 4 次モーメント定理を用いた解析に帰着させることだが, これについてはすでに様々な場合に何人かの研究者により研究が進められている (Firz, Riedel, Nualart, Tindel, etal.).

会田は, 永沼氏と共同で, パラメータ $\rho \in [0, 1]$ を導入し, これらの近似過程 $X_t^{(N)}$ と真の過程 X_t を補間する新しい補間近似過程 $X_t^{(N,\rho)}$ を導入し ($X_t^{(N,0)} = X_t, X_t^{(N,1)} = X_t^{(N)}$), 近似誤差を評価する研究を進めている. 重要な点は, 補間近似過程はパラメータを含んでいるが, このパラメータに関する微分過程 $\partial_\rho^k X_t^{(N,\rho)}$ が N によらない一様な評価を持つことを示すことなどにある.

さらに我々は, RDE の解のマリアバンの意味での微分可能性の新しい証明を得た. その証明の手法を組み合わせて, 極限分布の決定を進めているところである.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Shigeki Aida and Nobuaki Naganuma	4. 巻 57
2. 論文標題 Error analysis for approximations to one-dimensional SDEs via the perturbation method	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 381--424
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.18910/75919	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shigeki Aida, Takanori Kikuchi, Seiichiro Kusuoka	4. 巻 70
2. 論文標題 The rates of the L^p -convergence of the Euler-Maruyama and Wong-Zakai approximations of path-dependent stochastic differential equations under the Lipschitz condition	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 65--95
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2748/tmj/1520564419	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shigeki Aida	4. 巻 29
2. 論文標題 Semi-classical limit of Schrödinger operators in infinite dimensional spaces	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Sugaku Expositions	6. 最初と最後の頁 203--226
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Shigeki Aida
2. 発表標題 On a certain class of path-dependent stochastic differential equations
3. 学会等名 Japanese-German open conference on stochastic analysis 2019（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 会田茂樹
2. 発表標題 経路依存確率微分方程式について
3. 学会等名 確率解析とその応用 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shigeki Aida
2. 発表標題 On a certain class of path-dependent stochastic differential equations
3. 学会等名 New Directions in Stochastic Analysis: Rough Paths, SPDEs and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shigeki Aida
2. 発表標題 Rough differential equations containing path-dependent bounded variation terms
3. 学会等名 Workshop on Mathematical finance and related issues (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shigeki Aida
2. 発表標題 Asymptotics of spectral gaps on infinite dimensional spaces
3. 学会等名 Tokyo-Seoul conference in Mathematics --Probability Theory--
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shigeki Aida
2. 発表標題 Asymptotics of spectral gaps on loop spaces
3. 学会等名 Metric Measure spaces and Ricci curvature (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shigeki Aida
2. 発表標題 Support theorem for reflected diffusion processes
3. 学会等名 RIMS研究集会「確率論シンポジウム」
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Shigeki Aida
2. 発表標題 Rough differential equations containing path-dependent bounded variation terms
3. 学会等名 研究集会「確率解析とその周辺」
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Shigeki Aida
2. 発表標題 Reflected rough differential equations via controlled paths
3. 学会等名 Rough paths, Regularity structures and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

会田茂樹のページ
<https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~aida/index-j.html>

Shigeki Aida's page
<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~aida/index.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	重川 一郎 (Shigekawa Ichiro) (00127234)	京都産業大学・理学部・教授 (34304)	
連携研究者	日野 正訓 (Hino Masanori) (40303888)	京都大学・大学院理学研究科・教授 (14301)	
連携研究者	河備 浩司 (Kawabi Hiroshi) (80432904)	慶應義塾大学・経済学部・教授 (32612)	
連携研究者	稲浜 譲 (Inahama Yuzuru) (80431998)	九州大学・数理学研究院・教授 (17102)	
連携研究者	廣島 文生 (Hiroshima Fumio) (00330358)	九州大学・数理学研究院・教授 (17102)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	桑田 和正 (Kuwada Kazumasa) (30432032)	東北大学・大学院理学研究科・教授 (11301)	
連携研究者	針谷 祐 (Hariya Yuu) (20404030)	東北大学・大学院理学研究科・准教授 (11301)	