

令和 2 年 7 月 13 日現在

機関番号：34315

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16H03944

研究課題名(和文) スペクトル逆散乱理論の新モデル—離散から連続まで

研究課題名(英文) New models of inverse spectral and scattering theory - from discrete to continuous

研究代表者

磯崎 洋 (Isozaki, Hiroshi)

立命館大学・理工学部・授業担当講師

研究者番号：90111913

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,100,000円

研究成果の概要(和文)：(1)無限遠において一般的な計量を持つリーマン多様体の最も広いクラスにおいて一つのエンド(無限遠)に付随するS行列から多様体のリーマン計量と位相を決定する逆問題を解決した。無限遠の挙動としては漸近的双曲計量から多項式のオーダーで増加・減少するものを含み(したがってカuspも含み)、かつ数論に現れる錘状特異点をも許す一般的なものである。(2)周期的な格子を局所的に摂動した系上の離散シュレーディンガー作用素に関してS行列から摂動を決定する逆問題を解決した。さらに量子グラフに関する逆問題も解決した。(3)半空間における弾性波動方程式において定常散乱解の無限遠における漸近展開を行いレーリー波を導いた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

逆問題の目標は直接の観測が困難な対象を間接的情報から推測、同定、再構成することであり、その応用は原子・分子等のミクロな物理の世界から、工学における非破壊検査、X線トモグラフィー等の医療、さらに資源探査等にまで広く及んでいる。この逆問題の理論的背景を解明することは、応用上の成果に理論的支柱を与えると共に、新しい応用も示唆する。リーマン多様体上の逆問題は数学の世界での大きな問題であるが、さらに格子上の逆問題を考えることによって、数学の中の純理論的考察と並行したことが固体物理の世界にも適用できることを示した。本研究は離散と連続に共通した逆問題研究の方法があることを示したことでも意義深い。

研究成果の概要(英文)：(1) In a most general class of non-compact Riemannian manifolds with ends equipped with prescribed metrics at infinity, I have solved the inverse scattering problem: From one component of the S-matrix associated with an arbitrary end, one can reconstruct the Riemannian metric and the topology of whole manifold. One can allow asymptotically hyperbolic and polynomially growing or decaying ends (hence one can allow cusps), and also the conic singularities appearing in the orbifolds. (2) On locally perturbed periodic lattices, I solved the inverse scattering problem. Given a S-matrix, one can reconstruct the perturbation of the lattice. It contains the physically important example of graphene. I have also solved the inverse scattering problem for quantum graph. (3) For the boundary value problem of the elastic wave equation in a half-space, I have derived the asymptotic expansion of the reduced wave equation at infinity. It contains the Rayleigh waves propagating along the surface.

研究分野：数学，解析学

キーワード：逆問題 S行列 ディリクレノイマン写像 リーマン計量 格子 シュレーディンガー作用素

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

自然現象に関する認識を表現する手段として離散と連続は古来の主要な柱である。物理学においては現象を記述する方程式として状況に合わせてどちらが主とも従とも言い難く用いられている。一つの自然現象にもさまざまな側面があるのだから離散と連続の双方の特徴を見極め、場合によって最も適合する考え方を採用すべきであろう。この意味で真理は離散と連続の中間にあるといつてさえよいとも思われる。数学においても、微分方程式の離散近似は古典的な話題であるのみならず、現代においては数値計算における最重要課題である。また微分幾何学においても微分可能多様体の離散近似は古くからの話題でありながら現代においても新たな興味を湧き起こし研究が進められている。

領域内を伝播する波動から領域の物理的あるいは数学的特性を定める逆問題は数学理論、原子分子等に関する物理実験のみならず、地球内部構造の探査、資源探査、表面からの観測によって内部を知る非破壊検査、断層診断等の医療への応用等、現実世界でも広い応用を持っている。報告者は無限に広がった領域において無限遠から入射された波の反射波を観測することにより有限部分の数学的特性を定める散乱の逆問題に焦点を合わせてこれまで研究を行ってきた。この場合には、ハイゼンベルグが素粒子論において導入した S 行列を観測データとすることになる。数学的モデルとしてはコンパクトでないリーマン多様体の無限遠において標準的な計量に漸近する計量を与え、 S 行列から多様体のリーマン計量と位相を定める問題をいくつかの典型的な場合について解決していた。また局所的に摂動された格子系において S 行列から摂動を再構成する問題を最も基本的な平行格子に対して解決していた。これらの研究のなかで、連続モデルに対する逆散乱問題と離散モデルに対するそれとの間には理論構成において完全な平行関係があり、両者が同一の原理で解決されていることが予見された。この観察を一般的事実として敷衍できる例をより多く構築し、逆散乱問題の研究により広い視野と新たな課題を導入することを意図した。

2. 研究の目的

無限に広がった領域として2つのカテゴリーを考える。一つは非コンパクトなリーマン多様体であり、もう一つは周期的な格子系の有限部分を摂動した系である。それらの上での波動現象を考える。ラプラシアン連続スペクトルの性質を調べ、散乱する波を考察する。ハイゼンベルグの散乱行列を導入し、連続多様体、離散多様体(の特性)が散乱行列によって決定されていることを示す。その際に連続モデルと離散モデルの間に対応があり、両者が同一の原理によって成り立っていることが分かるような理論構成を考える。より具体的には次の問題を考える。

(1) 連続スペクトルをもつ非コンパクトリーマン多様体は大きいクラスをなすが、ある程度制約される。その中で最も広いと思われるクラスを設定して、その上のラプラシアンのスペクトル理論を確立する。そしてそのようなリーマン多様体はみな S 行列によって決定されることを示す。

(2) 局所的に摂動された周期的格子の一般的なクラスを設定し、その上のラプラシアンのスペクトル構造を研究する。格子系の摂動は S 行列から再構成されることを示す。

このとき、(1)と(2)が平行した理論構成の上に成り立っているかどうかを確かめる。その上で離散と連続の異同を観察し、新しい問題の開拓を図る。

3. 研究の方法

上における問題(1),(2)を共通な研究手段で行う。すなわち連続多様体、離散多様体上のラプラシアンのレゾルベントに対して極限吸収原理を証明する。連続スペクトルを記述する一般固有関数をレゾルベントの無限遠における漸近展開を通じて構成する。この固有関数系が完全性を持つことを示し、フーリエの反転公式を多様体上に拡張する。一般固有関数の無限遠における漸近展開から S 行列を定義する。多様体、あるいは格子系の有界領域において境界値問題を考え、ディリクレノイマン写像を定義する。 S 行列はディリクレノイマン写像と同等であることを証明する。ディリクレノイマン写像から多様体の有界部分、あるいは格子系の摂動を再構成する。連続モデル、離散モデルの間に平行な関係があるように理論構成をし、両者の相似点、相違点に注目して連続モデル、離散モデルの異同を研究する。

4. 研究成果

研究代表者は連続モデル・離散モデルの双方に関して個別にスペクトル散乱逆問題の研究を行ってきた。両者の間にある相似性についてもいくつかの実例を持ち、一般的な知見もある程度予測していた。本研究課題において、この予測はかなりはっきりした形をとっていることが分かり当初の予測を上回る多くの成果が得られた。

(1) で扱われる多様体のリーマン計量としてはその非有界部分における計量が多項式程度あるいは指数関数的な増大度や減少度を持つものが自然である。そのような例として漸近的ユークリッド計量や漸近的双曲計量がある。さらにそれらの中間的な挙動をもつ一連の計量のクラスがある。また多様体の無限遠部分の体積が遠方において減少する場合はカスプと呼ばれるが、これは数論に現れる古典的な多様体の例である。これらは多様体としては錘状の特異点を持ち、このような錘状特異点をもつ多様体は現在の幾何学の重要なテーマとなっている。さらにラプラシアンが連続スペクトルを持つようなリーマン多様体はみなこのようなクラスに収まると考

えてよい。このような一般的な多様体のクラスを記述する条件を見出し、その上のラプラシアン
のスペクトル理論を構築した。固有関数展開と S 行列を導入し、逆問題を次のように解決した。
無限遠において体積が増大するような end を任意の一つ固定する。その end に対応する S 行列
成分をすべてのエネルギーに対して与えれば多様体の微分可能部分のリーマン計量が定まる。
また、錘状特異点部分の構造も定まる。カスプの場合には一般化された S 行列を導入すること
により、同じ逆問題が解決される。この結果により考え得る限りで最も自然で一般的なリーマン多
様体のクラスに対して S 行列から多様体を決定する逆問題を解決することができた。このよう
な一般的なリーマン計量に対する逆問題の解決は今まで存在せず、これは全く新しい結果であ
る。この問題は 10 数年前に構想を描き始めたのであるがいくつかの一里塚を重ねるうちに全体
の構想を把握することができ、このようにまとめることができた。数論に現れる多様体は特異点
をもっている orbifold の構造をもち、特異性を気にせずに取り扱うことができる。我々の扱
う錘状特異点は orbifold になっておらずより一般になっていることに特徴がある。論文は現在
preprint “H. Isozaki and M. Lassas, Inverse scattering on non-compact manifolds with
general metric” として arXiv:2004.06431 に掲示されている。

(2) 平行、三角、六角、籠目、分割型、さらにそれらの層状化を含む一般的な格子のクラスを
設定し、その上のラプラシアンのスペクトル理論を構築した。固有関数展開を証明し、 S 行列を
導入した。さらに平行格子、三角格子、六角格子に対して S 行列から格子の欠損を決定する逆問
題、またポテンシャルを再構成する逆問題を解決した。応用上重要な例として現代の物質材料と
して重要なグラフェンを含んでおり、この結果は物理的に意義深いものである。また、これらは
電子が格子の上のみを動く tight-binding model であるが、電子が格子の辺上を動く量子グラ
フに対しても逆問題を解決した。この内容は preprint “K. Ando, H. Isozaki, E. Korotyaev and H.
Morioka, Inverse scattering on the quantum graph-Edge model for graphene-” として
arXiv:1911.05233 に掲示されている。

(1),(2) はともに S 行列の情報を有界領域におけるディリクレ・ノイマン写像の情報に変換
して示されるものであり、研究開始段階において予想した parallelism が成立している。理論上
の重要なステップはともに連続スペクトルに対応する定常シュレーディンガー方程式の 0 でな
い解の無限遠方における減少度を規定するレリッヒ型の定理に強く依存している。この定理は
連続スペクトルの中に埋蔵された固有値がないことを保証すると同時にゾンマーフェルトの放
射条件を満たす解の一意性、さらに S 行列とディリクレ・ノイマン写像との対応を考える上でも
重要な鍵となる。離散モデルに対してはこのレリッヒ型の定理が知られていなかったのである
が、ここを解決したことにより離散と連続の対応が完全に明瞭になった。レリッヒ型の定理の証
明は連続モデルに対しては現在はいくつか知られているが、最初の段階は多変数関数論による
ものであった。離散モデルにおいては代数幾何におけるヒルベルトの零点定理が重要な役割を
果たしていることは大変に興味深い。

このようにして連続モデルと離散モデルの間に平行な関係が存在することが分かった以上は、
両者がお互いをどれだけ近似しているか、という問題が起こる。そこで新たな研究課題として
離散モデルにおいて mesh size を 0 に近づけたときに連続モデルに収束するか、という問題が
浮かび上がった。平行格子に対しては収束極限が通常のラプラシアンであることは容易に推察
されるが、一般的な格子から出発した場合には極限を想像することは易しくない。離散モデルの
逆散乱問題の研究の経験はここにおいて大きな役割を果たし、平行格子、三角格子、六角格子等
の重要な例を含むある種の格子に対して mesh size を 0 にした場合の連続極限を得ることに成
功した。結果はフェルミ面の構造に強く依存し、エネルギー領域に依存して連続極限としてシュ
レーディンガー方程式やディラック方程式が得られる。我々の方法は散乱現象を記述する連続
スペクトルに対応する離散シュレーディンガー方程式の解の連続極限であり、ミクロなレベル
における固体物理学の理解において重要であろうと考えられる。この内容は preprint “H.
Isozaki and A. Jensen, Continuum limit for lattice Schroedinger operators” として
arXiv:2006.00854 に掲示されている。

研究テーマ (1),(2) は研究の大きな柱であるが、同時にスペクトル・散乱問題の順問題・
逆問題において各種の話題を研究し、次のような成果をあげることができた。

(3) 回転面上のラプラシアンに対して 1 次元のゲルファントーレピタン理論を展開し、回転面
のスペクトルデータと回転面のグラフとの間の無限次元解析的同相写像を構成した。これはゲ
ルファントーレピタン理論によって再構成できる回転面の特徴づけを無限次元解析的写像によ
って記述するものである。さらに与えられた曲率をもつ曲面の構成に関するミンコフスキーの
問題を回転面の場合に解決している。

(4) 3 次元ユークリッド空間の外部領域においてマックスウエル方程式の外部逆散乱問題を研
究し媒質に対する一般的な仮定のもとに S 行列から有界部分の境界のベッチ数が定まることを
証明した。この問題は微分形式に関するスペクトル逆問題とみなすことができる。この問題は連
続スペクトルの場合には全く結果がなく、完全に未知の分野である。境界をもつコンパクトな多
様体の場合にはディリクレ・ノイマン写像からベッチ数を定めるのが標準的な問題意識とされ
ている。その問題が非コンパクトな多様体にも拡張される例である。

(5) 2 層において異なる定数の波動伝播速度をもつ系のラプラシアンに対して一般化された固
有関数の角度方向に関して一様な無限遠での漸近展開を導いた。ある伝播方向に対して固有関
数は特異点をもっており、この問題は長い間未解決であった。

(6) 3次元半空間において弾性波動方程式の定常問題を考え、一般固有関数の無限遠での漸近展開を導いた。特に領域内部に伝わる実体波と表面のみを伝わるレーリー波を同時に取り出すことができた。この問題は困難な問題として長い間未解決であり、ここにおいて初めて解決された。

この(5),(6)ともに古典的な波動伝搬問題の中の未解決問題として長い間残されてきたものである。直観的には自然であるが技術的な困難のため、これまでは完全な結果がなかった。我々の得た結果は最終的なものと考えられ満足すべきものである。証明法は古典的な定常位相の方法を丁寧に適用する、ということにつきるのだが、問題とする作用素のグリーン関数の表示を精密に考察する必要があり、相当量の計算を必要とする難問であった。(5)はすでに論文として出版されているが、(6)は現在論文としてまとめている。

若い研究者・学生のための入門書を書くことは senior の研究者の務めである。スペクトル理論・散乱理論・逆問題へのアプローチのために著書“Maxwell Equation -Inverse Scattering in Electromagnetism”を World Scientific 社から出版した。また数理物理学への入門書として“解析力学と微分方程式”を執筆し共立出版から出発した。さらにスペクトル理論・逆問題に関する著書2冊を執筆中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 8件 / うち国際共著 5件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 H. Isozaki, M. Kadowaki and M. Watanabe	4. 巻 43
2. 論文標題 Uniform asymptotic profiles of stationary wave propagation in perturbed two-layered media	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Math. Meth. in Appl. Sci.	6. 最初と最後の頁 2789-2835
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/mma.5945	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Isozaki and E. Korotyaev	4. 巻 31
2. 論文標題 Inverse spectral theory for perturbed torus	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of geometric analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) org/10.1007/s12220-019-00248-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Ando, H. Isozaki and H. Morioka	4. 巻 20
2. 論文標題 Corrections to : Inverse scattering for Schroedinger operators on perturbed lattices	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Annales Henri Poincare	6. 最初と最後の頁 337-338
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.0007/s00023-018-0752-9	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Ando, H. Isozaki and H. Morioka	4. 巻 19
2. 論文標題 Inverse scattering for Schroedinger operators on perturbed lattices	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Annales Henri Poincare	6. 最初と最後の頁 3397-3455
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00023-018-0752-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Isozaki and E. Korotyaev	4. 巻 25
2. 論文標題 New trace formulas in terms of resonances for three-dimensional Schroedinger operators	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Russian Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 27-43
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1134/S106192081801003X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 H. Isozaki, Y. Kurylev and M. Lassas	4. 巻 724
2. 論文標題 Conic singularities, generalized scattering matrix, and inverse scattering on asymptotically hyperbolic surfaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Reine Angew. Math.	6. 最初と最後の頁 53-103
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/crelle-2014-0076	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 H. Isozaki and E. Korotyaev	4. 巻 14
2. 論文標題 Inverse spectral theory and the Minkowski problem for the surface of revolution	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Dynamics of PDE	6. 最初と最後の頁 321-341
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) http://dx.doi.org/10.4310/DPDE.2017.v14.a1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 H. Isozaki and E. Korotyaev	4. 巻 24
2. 論文標題 Global transformations preserving Sturm-Liouville spectral data	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Russian Journal of Physics	6. 最初と最後の頁 51-68
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1134/S1061920817010046	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Ando, H. Isozaki and H. Morioka	4. 巻 17
2. 論文標題 Spectral properties of Schroedinger operators on perturbed lattices	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Ann. Henri Poincare	6. 最初と最後の頁 2103-2171
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00023-015-0430-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計12件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 10件)

1. 発表者名 磯崎 洋
2. 発表標題 Continuum limit for lattice Hamiltonians
3. 学会等名 数理研シンポジウム スペクトル散乱理論とその周辺 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 H. Isozaki
2. 発表標題 Recent results on the spectral theory and inverse problems for graphene
3. 学会等名 Doppler Institute Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 磯崎 洋
2. 発表標題 Continuum limit of scattering solutions for periodic lattices
3. 学会等名 第170回学習院大スペクトル理論セミナー (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Isozaki Hiroshi
2. 発表標題 Spectral theory and inverse scattering on graphen
3. 学会等名 Inverse Problems, PDE and Geometry, University of Jyvaskyla (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Isozaki Hiroshi
2. 発表標題 Continuum limit for scattering solutions to discrete Schroedinger equations
3. 学会等名 Inverse problems seminar, The university of Helsinki (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Isozaki Hiroshi
2. 発表標題 Spectral theory and inverse scattering on periodic lattices
3. 学会等名 Seminaire analyse spectral, University of Aix-Marseille (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Isozaki
2. 発表標題 Inverse scattering on graphen
3. 学会等名 Seminar in geometric analysis, University of Helsinki (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 磯崎 洋
2. 発表標題 3 題 漸 Weyl の m 関数 Minkowski の問題 六角格子
3. 学会等名 作用素論セミナー キャンパスプラザ京都 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Isozaki
2. 発表標題 Inverse scattering on perturbed periodic lattices
3. 学会等名 Mathematical seminar in Aarhus University (Denmark) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Isozaki
2. 発表標題 Inverse scattering on graphen
3. 学会等名 Tosio Kato Centennial Conference 東京大学数理科学研究科 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 磯崎 洋
2. 発表標題 逆散乱理論からの 2 つの話題
3. 学会等名 数理研共同研究 微分方程式に対する散乱理論の展開 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 磯崎 洋
2. 発表標題 Invers scattering on non-compact manifolds with general metric
3. 学会等名 数理研究集会 低次元モデュライ空間の幾何学（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 H. Isozaki	4. 発行年 2018年
2. 出版社 World Scientific	5. 総ページ数 300
3. 書名 Maxwell Equation - Inverse Scattering in Electromagnetism	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担 者	岩塚 明 (Iwatsuka Akira) (40184890)	京都工芸繊維大学・基盤科学系・教授 (14303)	