

科学研究費助成事業（基盤研究（S））公表用資料
〔平成31年度（2019年度）研究進捗評価用〕

平成28年度採択分
平成31年3月15日現在

周期の理論と双有理幾何学の融合、ミラー対称性研究の新時代

Fusion of Birational Geometry and Theory of Periods;
A New Era for Studies of Mirror Symmetry

課題番号：16H06337

高橋 篤史 (TAKAHASHI, ATSUSHI)

大阪大学・大学院理学研究科・教授



研究の概要（4行以内）

非可換ホッジ理論・原始形式の理論・平坦構造（Frobenius 構造）をはじめとする周期の幾何学的理論と混合ホッジ構造・圏論的手法を土台とした双有理幾何学を融合し、両理論を飛躍的に発展させる。ミラー対称性現象のより深い理解を与えつつ、古典的重要問題に対する大きな貢献をもたらすことが目標である。

研究分野：数物系科学、数学、幾何学

キーワード：複素幾何学、双有理幾何学、ミラー対称性

1. 研究開始当初の背景

Gromov-Witten 不変量の理論に対する周期の理論と変形理論に対する周期の理論の同型が、古典的なミラー対称性であり、多くの研究者が取り組み数々の成果が得られているが、その完全な理解には至っていない。一方、ホモロジー的ミラー対称性ととも、圏論的手法に基づく双有理幾何学研究が活発に行われている。最近、圏論的力学系という新たな研究手法が登場した。これにより圏論的手法と周期の理論を合わせて双有理幾何学を研究することの重要性が強まった。また、弦理論的着想と圏論的手法に基づく双有理幾何学の特異点理論への応用と、特異点理論における諸結果の双有理幾何学への応用が、大いに期待されるようになってきた。

2. 研究の目的

周期の理論と双有理幾何学の融合で、ミラー対称性現象のより深い理解を与え、古典的重要問題に対する大きな貢献をもたらす。以下の諸課題において、既存の研究成果・手法を飛躍的に発展させることを目的とする。

1. 非可換ホッジ理論研究の推進と圏論的エントロピー研究への応用。量子原始形式の理論の構築（研究目的1）
2. (非可換)ホッジ理論による(非可換)双有理幾何学研究とくに極小モデル理論研究の推進（研究目的2）
3. Gromov-Witten 不変量・原始形式・Weyl 群不変式を結び付ける、ミラー対称性と周期写像の理解（研究目的3）

また、国際研究集会・勉強会・セミナーの

開催を通じてミラー対称性を核とした総合的研究拠点の形成を目指している。

3. 研究の方法

代表者・分担者・特任教員・協力者からなる研究体制で、上記目的の諸課題に関わる個別・共同研究を行うとともに、国際研究集会の年次開催、大阪大学・京都大学でのセミナー・勉強会により研究交流・成果発信を行う。

4. これまでの成果

代表者・分担者の研究はいずれも順調であり、得られた成果は多数の論文・プレプリントとして公開されている。また、代表者・分担者が行った招待講演は約100件あるなど、本研究は非常に興味を持たれている。

とくに重要な成果は以下の通りである。

- 代表者は協力者菊田らと圏論的エントロピー研究に取り組みGromov-Yomdin型定理等の重要結果を得た。当該研究分野を主導している。
- 代表者は Basalaeu と、可逆多項式の軌道体ヤコビ環の理論を構築、ホッホシルトコホモロジー環との同型を得て、「LG 軌道体 B 模型の環構造決定」という20年来の未解決問題を解決した。
- 代表者は協力者荒牧とある行列因子化の圏の完全例外列を構成し、特異点理論における Orlik-Randell 予想のホモロジー的ミラー双対版を解決、古典的重要問題へ40年ぶりに画期的貢献を与えた (arXiv:1903.02732)。
- 分担者藤野は、高次元代数多様体の研

究を精力的に行い、多岐にわたる多数の論文・プレプリントを発表した。本研究のみならず、代数幾何学全体の深化に極めて多大な貢献をしてきた。とくに顕著な成果は高次元安定多様体のモジュライ空間の射影性に関する結果である。

- 分担者入谷はトーリック軌道体のミラー対称性研究を行い、Coatesらと同変大量子コホモロジーに対するホッジ理論的ミラー対称性予想の一般的証明やクレパント変換予想の部分的解決という顕著な成果を得た。
- 分担者小西は、協力者三鍋・白石と複素鏡映群不変式論による平坦構造の構成を与えた。実鏡映群に対する齋藤・矢野・関口の結果を約40年ぶりに発展させた重要な成果である。

また、複数の国際研究集会を開催し、本研究および当該研究分野の活性化を行ってきた。平成28年度は3件の国際研究集会

- Workshop on Mirror Symmetry and Related Topics, Kyoto 2016
- Derived Category and Birational Geometry
- Geometry, Analysis and Mathematical Physics

を主催、3件の国際研究集会を共催、1件の国際研究集会の運営に携わった。平成29年度は2件の国際研究集会と1件の研究集会

- Mirror Symmetry and Related Topics
- Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry V
- 不変式・超平面配置と平坦構造

を主催、1件の国際研究集会を共催した。平成30年度は2件の国際研究集会

- Mirror Symmetry for Fano Manifolds and Related Topics
- Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry VI

を主催、2件の国際研究集会運営に携わった。

いずれの研究集会も非常に充実した内容で活発な研究交流がなされ、関連分野の進展に大きく貢献した。

5. 今後の計画

研究が順調に進捗しているので、これまでと同様に研究を継続してゆく。まずは、これまで本研究で得られた成果でプレプリントのものを出版し、国際研究集会等での招待講演・参加を通じて積極的に成果発表をする。

また、国際研究集会・勉強会・セミナーの開催の際に、新たな視点や問題意識も取り入れつつ、研究を発展させてゆく。

6. これまでの発表論文等(受賞等も含む)

1. BASALAEV Alexey, TAKAHASHI Atsushi, Hochschild cohomology and orbifold

Jacobian algebras associated to invertible polynomials, Journal of Noncommutative Geometry, 掲載決定。

2. KIKUTA Kohei, SHIRAIISHI Yuuki, TAKAHASHI Atsushi, A note on entropy of auto-equivalences: lower bound and the case of orbifold projective lines, Nagoya Journal of Math., 印刷中。
3. KIKUTA Kohei, TAKAHASHI Atsushi, On the categorical entropy and the topological entropy, International Mathematics Research Notices 2019(2) (2019), 457-469.
4. ITO Atsushi, MIURA Makoto, OKAWA Shinnosuke, UEDA Kazushi, The class of the affine line is a zero divisor in the Grothendieck ring: via \mathbb{G}_m -Grassmannians, Journal of Algebraic Geometry 28(2019), 245-250.
5. FUJINO Osamu, Semipositivity theorems for moduli problems, Ann. of Math. 187(2018), 639-665.
6. COATES Tom, IRITANI Hiroshi, JIANG Yunfeng, The crepant transformation conjecture for toric complete intersections, Adv. Math. 329(2018), 1002-1087.
7. KONISHI Yukiko, MINABE Satoshi, SHIRAIISHI Yuuki Almost duality for Saito structure and complex reflection groups, Journal of Integrable Systems 3(2018), 1-48.
8. IWAKI Kohei, Marchal Oliver, SAENZ Axel, Painleve equation, topological type property and reconstruction by the topological recursion, Journal of Geometry and Physics 124(2018), 16-54.
9. FUJINO Osamu, Effective basepoint-free theorem for semi-log canonical surfaces, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 53(2017), 349-370.
10. IRITANI Hiroshi, A mirror construction for the big equivariant quantum cohomology of toric manifolds, Mathematische Annalen, 368(2017), 279-316.
11. YASUDA Takehiko, Motivic Serre invariants modulo the square of \mathbb{L}^{-1} , Proceedings of the American Mathematical Society 146(2017), 547-554.

受賞：入谷寛(研究分担者) 第14回(平成29年度)日本学術振興会賞

7. ホームページ等

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~takahashi/project.htm>