

科学研究費助成事業（基盤研究（S））公表用資料  
〔平成31年度（2019年度）研究進捗評価用〕

平成28年度採択分  
平成31年3月19日現在

## 無限粒子系の確率解析学

### Stochastic Analysis on Infinite Particle Systems

課題番号：16H06338

長田 博文 (HIROFUMI, OSADA)

九州大学・大学院数理学研究院・教授



#### 研究の概要（4行以内）

対称性を持つ無限次元確率微分方程式を解くための新しい理論に基づき、無限粒子系の確率解析学を構築する。この解析学を、ランダム行列の固有値の熱力学極限として出現する無限粒子系を代表例とする、遠距離強相互作用を持つ系に適用し、遠距離強相互作用が生み出す新奇な現象を解明する。

研究分野：確率論

キーワード：無限粒子系 確率解析 ランダム行列 可解モデル 確率幾何

#### 1. 研究開始当初の背景

無限粒子系とは、統計物理に典型的に出現する対象で、単一もしくは有限種類の粒子の無限個の集団である。無限粒子系は、配置空間の元として捉えられ、点過程によって定常状態が表現される。ラベルを付けた粒子の確率力学は、対称性をもつ無限次元確率微分方程式で記述される。研究開始当初は、この無限次元確率微分方程式を解く斬新かつ強力な理論を思いた後であり、これを発展させることの重要性を確信していた。この理論は従来不可能だった対数関数に代表される長距離強相互作用をもつ無限粒子系に適用可能なものであった。

典型的な無限粒子系は干渉ブラウン運動と呼ばれる確率力学で、これを記述する無限次元確率微分方程式は、Langによって70年代後半に解かれた。しかし干渉ポテンシャルに対して3回連続微分可能かつコンパクトな台を持つことを仮定したため、興味深い長距離相互作用を除外していた。研究代表者は弱解の存在に対しては、それを含む長距離強相互作用でも適用可能な理論（第一理論）を構築していた。さらに分担者の種村氏とともに、強解の存在とパスワイズ一意性を示す新理論（第二理論）を開発している最中であった。

#### 2. 研究の目的

対称性を持つ無限次元確率微分方程式の新しい理論に基づき、無限粒子系の確率解析学を構築する。この解析学は、本質的にすべ

てのギブス測度を口切りに、ランダム行列の固有値の熱力学極限やガウス型ランダム解析関数の零点として出現する無限粒子系など、今まで手が出せなかったような遠距離強相互作用を持つ系に対しても有効である。それを用いて、遠距離強相互作用が生み出す、通常のギブス測度とは異なる、様々な特異現象を解明する。

本研究は無限粒子系の世界を広く探求するものだが、特に次の目標を掲げ道標とする。

- 1) 無限粒子系の確率解析の新理論の完成
- 2) 確率力学的普遍性
- 3) 確率力学的剛性
- 4) 確率解析の新理論と可解モデルの理論との融合、及び、新展開
- 5) 格子気体、ジャンプ型無限粒子系、分数ブラウン運動の無限粒子系

#### 3. 研究の方法

研究代表者および分担者を次の4つの班：確率解析班：確率幾何班：可解モデル班：極限定理班に分け、組織的かつ効率的に研究を遂行する。この班で前節の研究目標にあげた5つの課題に取り組んでいく。

本研究のコアは無限次元確率微分方程式の新理論だが、これには上述の確率解析班と確率幾何班が対応する。また、無限粒子系の解析学に、可積分系の視点から可解モデル班が取り組み、確率解析班の結果と相互作用を起こさせる。更に、無限粒子系研究の外延として、極限定理という形で確率偏微分方程式やランダム環境の確率力学の研究を含め研

究を拡がりのあるものにする。

ポスドクと技術スタッフを適宜雇用し、研究を加速させる。

次の3つの中核をなす研究集会を、それぞれ毎年開催する。「大規模相互作用系の確率解析」、「無限粒子系、確率場の諸問題」、「確率論シンポジウム」。

前2者は、研究テーマに応じた中規模の研究集会、最後は、広く確率論の話題に関する大規模な研究集会で、分野横断的に講演者を募り、当研究課題の成果を多数の確率論研究者に伝えると共に、他のテーマから刺激を受け当該研究の進展に繋げる。

#### 4. これまでの成果

確率解析班：ランダム環境型山田-渡辺理論を創り、今回の理論で無限次元確率微分方程式を解く際の重要な条件である IFC 条件を導いた。また、本理論が1粒子の結果の対応物を無限粒子系の空間に構築する一般的スキームであるという認識によって、古典的確率解析の膨大な結果を対応する無限粒子系の世界に移行しうることを明確にした。

テイル保存定理が証明されつつあり、これによって理論が使い易いものになると思われる。本理論の応用として Dirichlet 形式の一意性を証明した。これは、ランダム行列の確率力学的普遍性に使用される。また、ジャンプ型無限粒子系に本理論を拡張した。

確率幾何班：連続空間の行列式点過程の末尾事象の自明性を証明した。一次元空間の行列式点過程で古典的代表例を含む広いクラスで対数微分の存在を示し明示表現を得た。

可解モデル班：量子可積分系には、有理型、三角関数型、楕円関数型の3つのレベルが存在するが、この視点からは Dyson 模型は最下位である有理型とみなせる。そこで Dyson 模型を最高位の楕円関数レベルに拡張することを試み、アファイン・ルート系の分類理論を用いて7種類の新しい対数ガス模型を構築し、それらの無限粒子極限を求めた。

1次元可積分確率過程の研究が着実に進み、例えばモーメントを経由しない新手法を開発することで従来のモーメント発散の困難さを解決した。

極限定理班：ランダム行列の力学的普遍性を二つの手法で証明した。一つは従来から想定していた、係数の良い収束から導く手法で対象範囲は広いが、モデルごとに精密な計算を実行する必要があった。第二の手法は想定外に成功したもので、対称な確率力学である無限粒子系では、極限の確率微分方程式の解の一意性があれば、緩やかな条件で普遍性が成立することが分かった。

#### 5. 今後の計画

コアの理論をさらに完成させる。とくに IFC 条件のための十分条件を改良する。力学的普遍性は、可解モデルにおける極限定理との協奏を図る。

#### 6. これまでの発表論文等 (受賞等も含む)

・論文

[1] A. I. Bufetov, A. V. Dymov, H. Osada, The logarithmic derivative for point processes with equivalent Palm measures, J. Math. Soc. Japan, **71**(2), 2019, 451-469.

[2] M. Katori, Two-Dimensional Elliptic Determinantal Point Processes and Related Systems, Comm. Math. Phys., (2019).

[3] T. Imamura, \*T. Sasamoto, Fluctuations for stationary q-TASEP, Probab. Theory Relat. Fields, (2018).

[4] Y. Kawamoto, H. Osada, Finite particle approximations of interacting Brownian particles with logarithmic potentials, J. Math. Soc. Japan, **70**(3), 2018, 921-952.

[5] Y. Kawamoto, H. Osada, Dynamical Bulk Scaling limit of Gaussian Unitary Ensembles and Stochastic Differential Equation gaps, J. Theoret. Probab., 2018.

・受賞

[1] 長田博文：2018

「2018年度日本数学会賞秋季賞」

業績題目：長距離相互作用を持つ無限粒子系の確率力学とその剛性の研究

[2] 熊谷隆：2017

「2017年 フンボルト賞」

[3] 熊谷隆：2017

「第35回（平成29年度）大阪科学賞」

業績題目：複雑な系の上の確率過程と異常拡散現象の解析

[4] 熊谷隆：2016

「第33回井上學術賞」

業績題目：複雑な系の上の解析学と確率過程論の研究

[5] 笹本智弘：2016

日本数学会解析学分会「解析学賞」

業績題目：非平衡確率力学系の厳密解による研究

・社会への情報発信

数学セミナーの「ランダム行列」特集(2019年2月号)の編集にかかわり、分担者の記事を掲載することで、本研究を社会に発信した。

#### 7. ホームページ等

[http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~osada-labo/kiban\\_s\\_HP/index.html](http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~osada-labo/kiban_s_HP/index.html)