3版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 30 年　 6 月 22 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2016～2017
課題番号：１６Ｈ０６８８５
研究課題名（和文）ファノ多様体のK安定性の明示的研究

研究課題名（英文）An explicit study for K-stability of Fano manifolds

研究代表者
藤田　健人（Fujita, Kento）

京都大学・数理解析研究所・助教

研究者番号：４０７７９１４６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,300,000円

研究成果の概要（和文）：与えられたファノ多様体にいつケーラー・アインシュタイン計量が入るのかどうかという問題を主として考察した。これまで多くの人の寄与により、ファノ多様体上のケーラー・アインシュタイン計量の存在と、「K安定性」という純代数的な条件が同値であることが知られている。この研究課題は、上記のK安定性を如何に簡単なものに言い換えるか、という点で議論を行った。具体的には、K安定性と同値な「付値判定法」の理論を使い勝手の良いように発展させた。

研究成果の概要（英文）：I mainly treated the problem that which Fano manifolds admit Kaehler-Einstein metrics. It has been know that the existence of Kaehler-Einstein metrics is equivalent to K-stability, a purely algebro-geometric condition. The purpose of the project was to simplify the condition for K-stability of Fano manifolds. More precisely, we simplify "a valuative criterion" for K-stability of Fano manifolds, which is equivalent to K-stability.

研究分野：代数幾何学

キーワード：ファノ多様体　K安定性　極小モデル理論

1．研究開始当初の背景

ファノ多様体とは、反標準因子が豊富な射影代数多様体のことで、代数幾何のみならず様々な分野で重要な対象である。そのなかの問題の一つとして、ファノ多様体上にいつケーラー・アインシュタイン計量が入るのかという問題は基本的である。この問題は古くから考えられてきた問題で、例えば松島の障害・二木の障害が知られていたり、満渕の汎関数に着目したり、といった研究がなされてきた。
1990 年ごろに、Yau、Tian、Donaldson により、この問題は代数幾何の条件で言い換えられるのではなかろうか、という観察がなされた。そして様々な人の寄与ののち、近年、このケーラー・アインシュタイン計量の存在問題という微分幾何的問題が、K ポリ安定性という代数幾何的問題と同値であることが Chen-Donaldson-Sun 及び Tian によって最終的に示された。しかしながら K ポリ安定性のオリジナルの定義は純代数幾何的とはいえ複雑で、一般には判定は容易でない。Ross-Thomas による「スロープ安定性」なる概念が過去には研究されていたが、扱いが容易な反面あまりに弱い判定性（つまり、スロープ安定性は K 安定性の必要条件）ゆえ、K 安定性の必要十分条件を考えるにはあまりに不十分であった。（ただスロープ安定性は、ファノ多様体とは限らない一般の偏極代数多様体に対しても多くの結果が知られている点は特筆すべきである。）
この状態を打破すべく、近年研究代表者や Li により、ファノ多様体の K ポリ安定性の類似物である「一様 K 安定性」や「K 半安定性」に対しての「付値判定法」なる概念が提唱された。この概念は、体積函数や対数的食い違い係数を用いて記述される、双有理幾何的に自然な不変量を用いた概念であり、オリジナルの定義よりも幾分分かりやすいと思われる。実際、研究代表者によって、この「付値判定法」を用いることで、ケーラー・アインシュタイン計量の入るファノ多様体の（反標準因子の）体積の最良上界を与え、更に最良の上界を与えるものが射影空間に限ることが証明できた。ほかにも、Tian によって提唱されたアルファ不変量と K 安定性との関係に、「付値判定法」を用いることでより良い評価を与えることに成功したりした。
だが、この段階では「付値判定法」には未だ理論として進展の余地が十分にあった。例えば、多様体上空のどのような素因子だけをみれば十分か、といった問題や、具体例に対しどの程度この理論が適用可能か、等基本的な問題には着手されていなかった。例えば、川又対数端末的特異点の定義は、「多様体上空の全ての素因子に対し食い違い係数が-1 より大」という定義であるが、実際のところある対数的特異点解消を一つ取り、そこに出てくる有限個の素因子の食い違い係数を見れば十分なように、ある種の「有限性」があったが、「付値判定法」にはその類似の主張が期待できるのかどうか、といった問題が実用上最も気になる問題の一つであるように感じる。

2．研究の目的

上記のファノ多様体の K 安定性の「付値判定法」は、上に述べたようにまだまだ研究途上にあった。なので、この「付値判定法」を、ファノ多様体に話が限定されているとはいえ、より洗練して幾分わかりやすい同値な理論におきかえることを目的とする。特に、これまでの歴史の蓄積との親和性を考えるにあたり、双有理幾何学と相性の良い概念であるような理論の創設を念頭に置く。そして、具体例に応用可能な理論、つまり具体的代数幾何学で蓄積されたノウハウが生かせるような理論を追及することに重点を置く。例えば、低次元（ここでは二次元や三次元を念頭に置いている）のファノ多様体であったり、超平面配置対数的ファノ対であったりといった、良く知られかつ重要なファノ多様体および対数的ファノ対に対し適用可能であるような一般論の創造を目的とする。そして、（哲学やアイデアは微分幾何由来であったとしても、）理論や証明そのものは純代数的に構築できることを期待する。これは、特異点を許したりログ対を考えたりする際には、代数的な取り扱いのほうが幾分自然だと考えているためである。実際、K 安定なファノ多様体のモジュライ空間のコンパクト化を考える際、自然に川又対数端末的な特異点が現れることが知られており、あらかじめ特異点（や対）を許した対象を考えることは重要であり、代数幾何学の強みの一つであると考えている。

3．研究の方法

従来、ファノ多様体の K 安定性は、与えられた「テスト配位」と呼ばれる（射影直線上の）次元の上がった代数多様体と相対的に豊富な直線束の組に乗法群を作用させたもので然るべき条件を満たすものに対し、そこから然るべき（直線束や標準因子から定まる）交点数として定義される「Donaldson-Futaki 不変量」の符号をチェックすることで判定される。他方、近年 Berman によって着目された「Ding 不変量」なる類似物は、テスト配位の極限操作に強い、ファノ多様体ならではの優れた不変量である。代数的には、「対数的標準閾」等でもって定義される量である。ファノ多様体の「付値判定法」はこの Berman のアイデアに立脚する。すなわち、ファノ多様体の反標準因子より定まる次数付き線形系にフィルターを付け、そのフィルターの提示

部分で生成される有限生成部分フィルターの「Ding 不変量」を考え、それの極限でもって元のフィルター付けられた次数付き線形系の「Ding 不変量」を与えることにする。すると、フィルターとしてファノ多様体上空の因子由来のフィルターをとることで、「付値判定法」で現れる「体積函数の積分」に関連した実数値が現れる。更に、Li-Xu によって（スケール付き極小モデルプログラムを複数回走らせることで）示された「特殊テスト配位への帰着定理」を用いることで、実はそのような多様体上空因子由来の不変量の符号だけをチェックしていればよい、ということがわかる。以上が「付値判定法」のアイデアである。
ここで、「ファノ多様体上空のすべての因子」はもちろん無限にあり、そして二つの上空因子に対し各々の不変量の関係は一般には不明瞭である。しかしながら、「素爆発」由来の因子でその素爆発後の多様体対の特異点が悪いと、極小モデル理論を走らせつつ不変量を比較すると、「PLT 爆発」でとり替えられる、つまり不変量がより小さくなることが分かった。ここでのアイデアは Xu による川又端末特異点上空の「Kollar 成分の存在定理」での素因子取り換えの理論に類似する。これを用いると、（微分幾何的には明らかだが）射影平面の K 半安定性が非常に簡単に純代数的に証明できる。また、対数的ファノ対同士の有限射に対し、各々の一様 K 安定性・K 半安定性の条件がどの程度遺伝するかも考察できる。
他方、「付値判定法」なる理論は、種々の極限操作の上での帰着なので、「一様 K 安定性」や「K 半安定性」に対しては非常に良い振る舞いをするが、「K ポリ安定性」や「K 安定性」のような等号成立部分が微妙な条件については（対数的ファノ対に対しては）理論が作られていなかった。（もちろん最も重要な安定性条件は K ポリ安定性なので、この条件が未整備であることは望ましくない。）また、「付値判定法」ではもはやテスト配位が表に現れなくなった分、上記の等号成立条件をきちんと見なければならない安定性に対しては従来多くのことが分かっていなかった。これを打破すべく、「夢のような因子」なる概念を導入した。ここで「夢のような因子」とは、Cox 様の多元環が有限生成という定義であり、Hu-Keel による「森ドリーム空間」に影響されて名付けた概念である。この重要な性質として、「中心ファイバーが整なテスト配位」を与えることと「夢のような因子」を与えることが、高々ファイバー積をとる不定性を除き一対一に対応することを示した。これにより、（多少不格好ではあるが）「付値判定法」の K ポリ安定版や K 安定版が完成した。これの応用範囲は見かけによらず広いと思っており、実際例えば「超平面配置対数的ファノ対」に対しては完全な回答を与えることができた。更に、この場合の安定性条件は、既存の GIT 安定性との対応があることも確認できた。

４．研究成果

対数的ファノ対の一様 K 安定性及び K 半安定性の「付値判定法」は、その対数的ファノ対の「PLT 爆発」という、極小モデル理論と親和性の高い双有理射だけを観察すればよいことがわかった。また、従来の「付値判定法」で考えられてきた不変量のうち、擬有効閾を用いて得られる不変量（「j 不変量と呼んでいたもの」）の観察が不要になり、理論が幾分簡略化された。更に、この新しい判定法を用いることで、射影平面の K 半安定性の純代数的かつ簡単な別証明を与えた。そして対数的ファノ対の間の（対としての）クレパントな有限射に於いて、それぞれの一様 K 安定性及び K 半安定性の関係性を論じることに成功した。
また、対数的ファノ対の一様 K 安定性、K 安定性、K ポリ安定性、K 半安定性といった微妙な差異を込めて「付値判定法」の一般論を構築・拡張した。更にその応用として「超平面配置対数的ファノ対」に対するこれらの安定性条件を数値的条件で言い換え、それらの条件が古典的な GIT 安定性の種々の条件と完全に一致することを証明した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　４件）

Kento Fujita, Optimal bounds for the volumes of Kahler-Einstein Fano manifolds, American Journal of Mathematics, 140 (2018), 391–414. （査読有）
https://doi.org/10.1353/ajm.2018.0009

Kento Fujita, Examples of K-unstable Fano manifolds with the Picard number 1, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 60 (2017), 881–891. （査読有）
https://doi.org/10.1017/S0013091516000432

Kento Fujita, On three-dimensional semi-terminal singularities, Bulletin of the Korean Mathematical Society, 54 (2017), 1471–1483. （査読有）
https://doi.org/10.4134/BKMS.b160676

Kento Fujita, Kazunori Yasutake, Classification of log del Pezzo surfaces of index three, Journal of the

Mathematical Society of Japan, 69 (2017), 163-225. （査読有）
https://doi.org/10.2969/jmsj/06910163

〔学会発表〕（計　10 件）

Kento Fujita, K-stability of log Fano hyperplane arrangements, The 16th affine algebraic geometry meeting, Kwansei Gakuin University, March 10,2018.

Kento Fujita, On globally embeddedness of simple normal crossing varieties, Log geometry, degenerations and related topics, Kobe University, February 20, 2018.

Kento Fujita, Openness results for uniform K-stability, Positivity concepts on holomorphic line bundles and theories on canonical Kahler metrics, Osaka City University, January 30, 2018.

Kento Fujita, K-stability of log Fano hyperplane arrangements, Bi-annual Algebraic and Tropical Meetings of Brown and Yale, Yale University, November 30, 2017.

Kento Fujita, A valuative criterion for uniform K-stability of log Fano pairs, Classification and Moduli theory of algebraic varieties, Ischia, Italy, September 14, 2017.

Kento Fujita, Openness results for uniform K-stability, Stability, Boundedness and Fano varieties, BICMR, Beijing, August 28, 2017.

Kento Fujita, Uniform K-stability and plt blowups of log Fano pairs, Moduli of Kstable varieties, INdAM, Rome, July 13, 2017.

Kento Fujita, Uniform K-stability and plt blowups of log Fano pairs, Symposium in Geometry and Differential Equations, Chinese Academy of Sciences, Beijing, July 6, 2017.

Kento Fujita, Uniform K-stability and plt blowups of log Fano pairs, Spring Meeting on Algebraic Geometry, School of Mathematics, IPM, Tehran, Iran, April 12, 2017.

Kento Fujita, Problems on K-stability of log Fano pairs, Workshop on stability and moduli spaces, American Institute of Mathematics, San Jose, California, January 13, 2017.

〔図書〕（計　0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
藤田　健人（FUJITA, Kento）
京都大学数理解析研究所・助教
研究者番号：40779146

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　　）

研究者番号：

(4)研究協力者
（　　　）