

平成 30 年 5 月 27 日現在

機関番号：23901

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2016～2017

課題番号：16H07115

研究課題名(和文) Broadhurst-Kreimer予想とその周辺

研究課題名(英文) Around the Broadhurst-Kreimer conjecture

研究代表者

田坂 浩二 (TASAKA, Koji)

愛知県立大学・情報科学部・助教

研究者番号：30780762

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究のゴールは、多重ゼータ値とモジュラー形式の関係を記述する予想である、Broadhurst-Kreimer予想を理解することである。これに対し、低い深さの多重ゼータ値とモジュラー形式の関係に関する研究を行い、両者の明示的な対応を見出した。これはDing Ma(Duke大学)との共同研究である。また、多重ゼータ値とモジュラー形式の共通の一般化である多重アイゼンシュタイン級数に関する興味深い観察も得られている。

研究成果の概要(英文)：A goal of this project is to reveal the Broadhurst-Kreimer conjecture, which describes certain relationships between multiple zeta values and modular forms. For this, we focused on multiple zeta values of lower depths, and found explicit connections with modular forms. This is a joint work with Ding Ma from Duke University. Also, I observed an interesting connection between modular forms and multiple Eisenstein series which is a common generalization of multiple zeta values and modular forms.

研究分野：整数論

キーワード：多重ゼータ値 モジュラー形式 Broadhurst-Kreimer予想

1. 研究開始当初の背景

本研究の主人公は、多重ゼータ値とモジュラー形式である。多重ゼータ値は、1980年代後半ごろに起こった3点抜き射影直線の基本群における絶対ガロア群の研究や量子群の研究を発端に、ここ2、30年のうちに様々な数学や物理と結びつきながら大変活発に研究されている対象である。一方、モジュラー形式の研究は古く、特に整数論において重要な役割を果たしてきた。この多重ゼータ値とモジュラー形式の間には、ある種の関係性があることが示唆されている。特殊な場合に具体的な現象は見つかったのだが、その一般性はよくわかっていないという状況である。近年、両者の関係の本質を解明しようという研究が F. Brown, B. Enriquez, R. Hain, A. Levin, M. Matsumoto, T. Terasoma らの仕事を中心として起きている。研究代表者は、Gangl-Kaneko-Zagier らにより導入された多重 Eisenstein 級数や、F. Brown により導入された深さ次数化モチビクリー代数の研究などを通して、この研究に寄与してきた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、多重ゼータ値の深さに関する次元予想である Broadhurst-Kreimer 予想(以下 BK 予想と呼ぶ)を様々な観点から解析し、部分的な解決を得ることである。BK 予想は 1997 年提唱されたモジュラー形式との深い関係を示唆する予想であり、その大部分は未解決である。BK 予想およびモジュラー形式との関係の理解を深めるための試みとして、研究代表者は以下の問題に取り組む。

- (A) BK 予想の深さ 4 の場合の解析
- (B) 多重 Eisenstein 級数による次元予想へのアプローチ
- (C) 低い深さの場合の既存の結果の改良

3. 研究の方法

以下、上述の(A)~(C)について、研究方法を述べる。

- (A) 既存の結果から着手する方法として、まずは F. Brown により構成された深さ 4 のモチビクリー代数の生成元 c と線形化複シャッフルリー代数の生成元 e との関係性を明らかにすることが考えられる。両者がある程度“等しい”ことがわかれば、不変式論などを応用して線形化複シャッフルリー代数の次元の評価を得ることで、深さ 4 の場合の BK 予想の肯定的な解決が期待される。
- (B) 多重 Eisenstein 級数は、古典的な Eisenstein 級数を多重ゼータ値の級数表示にならって多重化した複素上半平面上の正則関数である。多重 Eisenstein 級数

からなる代数は、部分代数としてモジュラー形式の空間を含んでおり、また多重ゼータ値からなる代数への自然な射影があるため、多重 Eisenstein 級数の代数構造の研究は、多重ゼータ値とモジュラー形式の具体的な関係を研究する際に役立つ。多重ゼータ値の代数構造が幾何(モチーフ)的なアプローチによりある程度明らかになりつつあるが、多重 Eisenstein 級数の代数構造は未だよくわかっていない。多重 Eisenstein 級数を類似のコンセプトで研究されている幾何的な対象(B. Enriquez による楕円多重ゼータ値や F. Brown による Eisenstein 級数の反復積分)と結びつけることにより、代数構造の研究が進展するだろう。

- (C) 深さ 2 の多重ゼータ値とモジュラー形式の間には、Gangl-Kaneko-Zagier により明示的な対応が得られている。この対応を一般化することが一つの究極のゴールである。これに対し、F. Brown によるモチビクガロア群の余作用を用いた多重ゼータ値の関係式の研究を応用し、彼らの結果をより深いレベルで理解する。

4. 研究成果

得られた成果は以下である。

- (A) 生成元 c と e の比較について、S. Yasuda により具体的な予想が提唱されている。この予想をシンボリックな計算により検証するプログラムを作り、計算機を用いて重さが 48 まで正しいことを確かめた。また特殊な場合に両者が等しいことも確かめている。

他の視点からの取り組みとして、極化複シャッフルリー代数に関する J. Ecalle と F. Brown による研究の比較を行った。これは N. Matthes との共同研究で、論文は投稿中である(On Ecalle's and Brown's solutions to the double shuffle equations modulo products, preprint)。生成元 c と e は極化複シャッフルリー代数の中で扱えるため、彼らの理論を援用することは新たなアプローチにつながる。

関連して多重ゼータ値の関係式とモジュラー形式の関係性を記述する予想である、F. Brown により提唱された純奇多重ゼータ値予想にも取り組んだ。これは BK 予想の特殊な場合であるが、BK 予想を解決する際に役立つ可能性がある。これに対し、D. Ma との共同研究により、純奇多重ゼータ値予想に関連した線形代数的な問題を部分的に解決した。論文は現在、執筆中である。

- (B) 多重 Eisenstein 級数と楕円多重ゼータ値との関係を模索する中で、両者の直接的な関係を観察することはできていないが、深さ 2 の多重 Eisenstein 級数が満たす関係式と深さ 2 の楕円多重ゼータ値が満たす関係式の間にも明示的な関係を見出すことができた。両者がどの程度違うものなのか、関係式のレベルで比較する方向性を提示できた。
- (C) Gangl-Kaneko-Zagier によって得られた対応の精密化に関する結果を得た。具体的には、与えられたカスプ形式に対し、係数がカスプ形式の critical value の 1 次結合となるような深さ 2 の多重ゼータ値の明示的な線形関係式を与えた。証明は、F. Brown により得られた motivic 多重ゼータ値からある形式的な代数への同型写像を計算すること、および深さ 2 の多重ゼータ値が満たす複シャッフル関係式の有理数解（深さ 2 の有理結合子）とカスプ形式と Eisenstein 級数の Petersson 内積を計算することで得られる critical value の間の関係式 (Kohnen-Zagier 関係式) の係数を関係付けることによりなされる。全く異なる二つの対象（深さ 2 の有理結合子と Kohnen-Zagier 関係式）が結びついたことは興味深く、一般化への道筋となりえよう。この結果は D. Ma との共同研究の論文にまとめ、現在投稿中である (Relationship between multiple zeta values of depths 2 and 3 and period polynomials, preprint)。

ここで用いたアイデアは、多重 Eisenstein 級数の研究の発展にも寄与し得る。実際、深さ 2 の多重 Eisenstein 級数とモジュラー形式の間の明示的な対応を観察している。これは今後の課題である。

- (D) 当初、予定していなかった研究で思いがけない進展があったものとして、Kaneko-Zagier 予想に関する研究がある。この予想は、最近提唱された予想で、有限多重ゼータ値と多重ゼータ値の対称積和で定義される対称化多重ゼータ値 (実数) の間に代数同型対応があることを主張する予想である。有限多重ゼータ値は、各素数 p で定義される有限調和級数の mod p の値を束ねたものである。この予想を通して、多重ゼータ値の代数構造が、素数と結びつきの深い整数論の研究 (岩沢理論など) においても役立つことが期待されている。
- H. Bachmann, Y. Takeyama との共同研究において、二通りの極限 $q \rightarrow 1$ を考えることにより、それぞれ有限多重ゼータ値と対称化多重ゼータ値を与えるような、

1 つの有限 q 多重ゼータ値を構成した。この 2 つの射影の核を調べることで、予想の解決 (もしくは、改訂版予想) が期待できる。これまでなかったアプローチを提唱している点で、独創的な結果といえよう。現在、論文は執筆中である (Cyclotomic analogues of finite multiple zeta values, preprint)。

また有限 q 多重ゼータ値のある種の保形性に関する観察もいくつか行っており、本研究目的に対する別の視点からの研究につながることを期待される。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 3 件)

H. Bachmann, K. Tasaka, The double shuffle relations for multiple Eisenstein series, Nagoya Math. J., 査読有, 230, 2018, 180--212.

<https://doi.org/10.1017/nmj.2017.9>

S. Kadota, T. Okamoto, K. Tasaka, Evaluation of Tornheim's type of double series, Illinois J. Math., 査読有, 61, 2017, 171--186.

<https://www.projecteuclid.org/euclid.ijm/1520046214>

Koji Tasaka, On linear relations among totally odd multiple zeta values related to period polynomials, Kyushu J. Math., 査読有, 70(1), 2016, 1--28. <https://doi.org/10.2206/kyushujm.70.001>

[学会発表] (計 10 件)

田坂浩二, Totally odd multiple zeta values and periods polynomials, Trimester Seminar on "Periods in Number Theory, Algebraic Geometry and Physics", Hausdorff Research Institute for Mathematics (Germany), Jan. 30, 2018

田坂浩二, Comparison between cuspidal generators on the depth-graded motivic Lie algebra and on the linearized double shuffle Lie algebra, Number Theory Lunch Seminar, Max Planck Institute for Mathematics (Germany), Sep. 20, 2017

田坂浩二, 2 重ゼータ値の周期多項式関係式の精密化, 九州代数的整数論 2017, 九州大学, 2017 年 3 月 8 日--10 日

田坂浩二, カスプ形式と 2 重ゼータ値について, 第 15 回量子情報ミニワークショップ, 浜名湖弁天島ファミリーホテル開春楼, 2017 年 1 月 20 日--23 日

田坂浩二, ルート系のゼータ関数の特殊値について, 首都大学整数論セミナー, 首都大学東京, 2016 年 12 月 13 日

田坂浩二, A refinement of period

polynomial relations between double zeta values, 8th international symposium on natural science (2016), Incheon International University (Korea), Nov. 3, 2016

田坂浩二, Period polynomial relations between double zeta values revisited, Modular Forms and Period Integrals, University of Tokyo (Japan), Sep. 14, 2016

田坂浩二, 多重ゼータ値の線形関係式, 名古屋組合せ論セミナー, 名古屋大学, 2016年7月29日

田坂浩二, 2重ゼータ値の周期多項式関係式の精密化, 北陸数論セミナー, 金沢大学サテライトプラザ, 2016年7月7日

田坂浩二, 3重ゼータ値とモジュラー形式, 関西多重ゼータ研究会, 大阪体育大学, 2016年5月14日

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ist.aichi-pu.ac.jp/~tasaka/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田坂 浩二 (TASAKA, Koji)

愛知県立大学・情報科学部・助教

研究者番号：30780762