

令和元年5月27日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K00003

研究課題名(和文) 木構造に基づくグラフアルゴリズムの設計法に関する研究

研究課題名(英文) Research on Design Method of Graph Algorithm based on Tree Structure

研究代表者

周 暁 (Zhou, Xiao)

東北大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：10272022

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究で得られた成果として、グラフ特に木や木幅が小さいグラフに関する理論的な展開とアルゴリズムの効率化があげられる。木幅というのはグラフを木分解する際、分解木の節点に含まれるグラフの頂点数から1を引いた最大値である。木幅1のグラフは林であり、木幅2のグラフは直並列グラフである。本研究では、特に木構造をもつグラフに対してグラフの分割と巧みな動的計画法を導入して、数多くの組合せ問題を効率よく解くアルゴリズムを研究開発することに成功した。特に本研究で開発したアルゴリズムは、数多くの組合せ問題に適用可能であり、しかも得られた成果をまとめた12編の学术论文を発表しており、高く評価できる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

学術的貢献として、グラフ特に木や直並列グラフや木幅が小さいグラフに関する理論的な展開とアルゴリズムの効率化があげられる。グラフアルゴリズムに関する成果はこの3年間に12編の論文として一流国際学術誌や国際会議で発表されている。これらのアルゴリズムの開発で導入された手法は多くの組合せ問題に応用可能であり、理論計算機科学分野の重要な成果である。

研究成果の概要(英文)：The results obtained in this research are theoretical development of efficient algorithms for graphs with small tree-widths. The tree-width of a graph is the maximum value obtained by subtracting 1 from the number of vertices in nodes of its tree-decomposition. The graph of tree-width 1 is a forest, and the graph of tree-width 2 is series-parallel. In this research, in particular, we succeeded in researching and developing efficient algorithms for solving many combinatoric optimal problems by introducing graph division and clever dynamic programming to a graph having a tree structure. In particular, the algorithms developed in this research are applicable to many combinatoric problems, and we have published 12 academic papers summarizing the results obtained in this research, which can be highly appreciated.

研究分野：理論計算機科学

キーワード：グラフ 木 木幅 アルゴリズム 木分解 組合せ問題

1. 研究開始当初の背景

様々な実用上の問題は、点とそれらを結ぶ辺からなる“グラフ”に関する組合せ最適化問題として定式化することができる。しかし、それら多くの問題が一般のグラフに対してはNP困難であり、最適解を効率よく求めることは難しいとされている。一方、実用上の問題に現れるグラフには、問題毎に構造に特徴があることが多く、問題の入力すなわち“インスタンス”に条件を仮定することが可能である。例えば、インターネットの接続構造はいわゆるスモールワールドの性質を持っている。そのため、グラフのクラスをある程度制限して効率のよいアルゴリズムを開発することが行われてきた。具体的には、平面グラフ、部分k木、区間グラフなどに対し、高速な厳密アルゴリズム、精度のよい近似アルゴリズムやグリーディアルゴリズムなどが与えられている。これらのアルゴリズムは、グラフの“構造”を上手く利用することで得られている。先に挙げた平面グラフ、部分k木、区間グラフ、スモールワールドネットワークに対しては、それぞれのグラフ構造が詳細に研究されている。例えば、平面グラフに対してはLiptonとTarjanによる分解定理が知られており、部分k木に対してはRobertsonとSeymourによるグラフマイナー定理やBodlaenderによる高速なグラフ構造判定法が知られている。今まで開発されているアルゴリズムの多くは、グラフ構造の特徴に基づき、個々の問題に合った手法を開発することで得られている。

2. 研究の目的

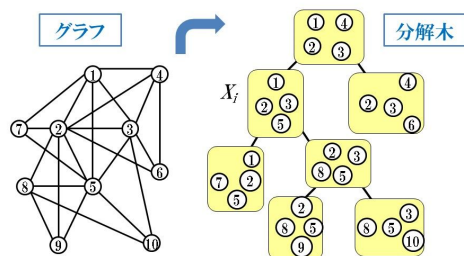
様々な実用上の問題は、グラフに関する組合せ最適化問題として定式化できるが、それら多くの問題は一般のグラフに対してはNP困難である。そこで、グラフのクラスをある程度制限することで、効率のよいアルゴリズムの開発が行われてきた。これらのアルゴリズムはグラフの構造を上手く利用することで得られているが、このアプローチにはグラフ理論に関する深い知識を必要とする。したがって、よりアルゴリズム設計者に親和なアルゴリズム設計論の確立・体系化が求められていた。システムの設計・解析、VLSIの配線問題、グラフ描画問題、通信スケジューリング問題、ネットワークフロー問題など一見異なる問題であっても、開発されているアルゴリズムには共通する手法がある。それら共通する手法を解析し一般化することで、アルゴリズム設計の方法と技術を体系化する。すなわち、本研究では、グラフアルゴリズム理論の観点から木構造をもつグラフに対してグラフの分割と巧みな動的計画法を用いることで、「解くことができるインスタンス条件とその利用法」を解明する。

3. 研究の方法

最初に、具体例として配電融通問題を取り上げ、それを解くアルゴリズムを調査し、実際の電力網と同規模のグラフに対し、応用上許容される時間と精度で最大分割（電力供給量を最大にする、即ち停電量を最小にする）問題の近似解を求めるヒューリスティックアルゴリズムを構築し、その実用性を計算機上で検証した。配電融通問題で正常に電力が供給されているとき、グラフの各連結成分は木である。次に、木と部分k木に対する成果を拡張した。部分k木は木の一般化であり、普通の木は部分1木であり、外平面グラフや直並列グラフは部分2木である。部分k木は直並列グラフの一般化ともいえる。部分k木の分解木という木構造と動的計画法を用いて、部分k木に対する効率のよいグラフ分割アルゴリズムを構築した。

部分k木 $G=(V, E)$ の分解木とは次の(1), (2), (3)の条件を満たす木 $T=(V_T, E_T)$ である。

- (1) グラフGの点は木Tの少なくとも一つの節点 $x_i \in V_T$ に属している。
- (2) Gの各辺 $e=(v, w) \in E$ に対し、 $v, w \in X_i$ なる木Tの節点 $x_i \in V_T$ がある。
- (3) 全ての節点 $x_i, x_j, x_p \in V_T$ に対し、もし x_i から x_p へのT上の道に x_j があれば、 $x_i \sim x_p$ x_j である。



右図にグラフと分解木の一例を示している。分解木の幅とは $\max\{|X_i|-1: X_i \in V_T\}$ である。グラフGの幅とは全ての分解木の幅のうち最小な幅であり、 $\text{treewidth}(G)$ と書く。グラフGが部分k木である必要十分条件は $\text{treewidth}(G) \leq k$ である。

分解木Tの任意の節点 x_i を選び、Tを x_i を根とする根付き木であるとみなす。各辺 $e=(v, w) \in E$ に対して $v, w \in X_i$ なる分解木Tの一つ節点 $x_i \in V_T$ を選び、 $\text{rep}(e)=i$ と定義する。Tの各点 x_i について

$E(x_i)=\{e \in E: \text{rep}(e)=i, \text{節点 } x_i \in V_T \text{ を根とした } T \text{ の部分木に } x_j \in V_T \text{ が入っている}\}$ を定義する。辺集合 $E(x_i)$ により誘導されるGの部分グラフを $G[x_i]$ と書く。ある組合せ問題を例として説明すると、その問題の $G[x_i]$ に対するすべての許容解の集合をFとする。 x_i で

の各解 $f \in F$ のベクトル表現 $S(X_i, f)$ をうまく定義することによって, X_i の解のベクトル表現の種類は高々グラフの入力サイズの多項式で抑えるように X_i での同値類を特徴付ける関数を定義できた. このようにすれば, T の葉から根に向かって, 動的計画法を用いることによって, 数多くの組み合わせ問題を高速で解くことを示した.

4. 研究成果

研究実施計画通りに研究を進めてきた. 本研究で得られた成果として, グラフ特に木や木幅が小さいグラフに関する理論的な展開とアルゴリズムの効率化があげられる. 木幅というのはグラフを木分解する際, 分解木の節点に含まれるグラフの点の数の最大値から 1 を引いた値である. 木幅 1 のグラフは林であり, 木幅 2 のグラフは直並列グラフである. 今回の検証で, 特に木に対しては, グラフの分割と巧みな動的計画法を導入して, the partial vertex cover problem や the ridesharing problem を多項式時間で解くアルゴリズムを研究開発することに成功した. また, the partial vertex cover problem については, コグラフにおいて, 分解木を用いて被覆辺数をパラメータとしたときの FPT アルゴリズムを開発することにも成功した. 特に本研究で開発したアルゴリズムは, 木やコグラフにおける数多くの組合せ問題に適用可能と思われ, 効率よいアルゴリズム, FPT アルゴリズムの開発に役に立つと思っている. 本研究で得られた成果をまとめた 12 編の学術論文を発表しており, 高く評価できる.

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 12 件)

1. Tatsuhiko Hatanaka, Takehiro Ito, and Xiao Zhou, The Coloring Reconfiguration Problem on Specific Graph Classes, IEICE Trans. on Information and Systems, Vol. E102-D, No. 3, pp. 423-429, March 2019. 査読あり

2. Hiroki Maniwa, Takayuki Oki, Akira Suzuki, Kei Uchizawa, and Xiao Zhou, Computational power of threshold circuits of energy at most two, IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, Vol. E101-A, no. 9, pp. 1431-1439, September 2018. 査読あり

3. Tatsuhiko Hatanaka, Takehiro Ito, and Xiao Zhou, Parameterized Complexity of the List Coloring Reconfiguration Problem with Graph Parameters, Theoretical Computer Science, Vol. 739, pp. 65-79, August 2018. 査読あり

4. Hiroki Osawa, Akira Suzuki, Takehiro Ito, and Xiao Zhou, The Complexity of (List) Edge-Coloring Reconfiguration Problem, IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, Vol. E101-A, No. 1, pp.232-238, January 2018. 査読あり

5. Haruka Mizuta, Takehiro Ito, and Xiao Zhou, Reconfiguration of Steiner Trees in an Unweighted Graph, IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, Vol. E100-A, No. 7, pp. 1532-1540, July 2017. 査読あり

6. Yusuke Aoki, Bjarni V. Halldorsson, Magnus M. Halldorsson, Takehiro Ito, Christian Konrad and Xiao Zhou, The Minimum Vulnerability Problem on Specific Graph Classes, Journal of Combinatorial Optimization (JCO), Vol. 32, No. 4, pp. 1288-1304, November 2016. 査読あり

7. Hiroki Osawa, Akira Suzuki, Takehiro Ito, and Xiao Zhou, Algorithms for Coloring Reconfiguration under Recolorability Constraints, In Proceedings of the 29th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2018), Leibniz International Proceedings in Informatics, Vol. 123, pp. 37:1-37:13, 2018. 査読あり

8. Tatsuhiko Hatanaka, Takehiro Ito, and Xiao Zhou, The Coloring Reconfiguration Problem on Specific Graph Classes, In Proceedings of the 11th Annual International Conference on Combinatorial Optimization and Applications (COCO A 2017), Lecture Notes in Computer Science, Vol. 10627, pp. 152-162, 2017. 査読あり

9. Hiroki Osawa, Akira Suzuki, Takehiro Ito, and Xiao Zhou, Complexity of Coloring

Reconfiguration under Recolorability Constraints, In Proceedings of the 28th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2017), Leibniz International Proceedings in Informatics, Vol. 92, pp. 62:1-62:12, 2017. 査読あり

10. Tatsuhiko Hatanaka, Takehiro Ito, and Xiao Zhou, Parameterized Complexity of the List Coloring Reconfiguration Problem with Graph Parameters, In Proceedings of the 42nd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2017), Leibniz International Proceedings in Informatics, Vol. 83, pp. 51:1-51:13, 2017. 査読あり

11. Hiroki Osawa, Akira Suzuki, Takehiro Ito, and Xiao Zhou, The Complexity of (List) Edge-Coloring Reconfiguration Problem, In Proceedings of the 11th International Conference and Workshops on Algorithms and Computation (WALCOM 2017), Lecture Notes in Computer Science, Vol. 10167, pp. 347-358, 2017. 査読あり

12. Haruka Mizuta, Takehiro Ito and Xiao Zhou, Reconfiguration of Steiner Trees in an Unweighted Graph, In Proceedings of the 27th International Workshop on Combinatorial Algorithms (IWOCA 2016), Lecture Notes in Computer Science, Vol. 9843, pp. 163-175, 2016. 査読あり

[学会発表](計6件)

1. Hiroki Osawa, Akira Suzuki, Takehiro Ito, and Xiao Zhou, Algorithms for Coloring Reconfiguration under Recolorability Constraints, In Proceedings of the 29th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2018), Leibniz International Proceedings in Informatics, Vol. 123, pp. 37:1-37:13, 2018. (Jiaoxi, Taiwan, December 16-19, 2018: Our presentation was on December 18.)

2. Tatsuhiko Hatanaka, Takehiro Ito, and Xiao Zhou, The Coloring Reconfiguration Problem on Specific Graph Classes, In Proceedings of the 11th Annual International Conference on Combinatorial Optimization and Applications (COCOA 2017), Lecture Notes in Computer Science, Vol. 10627, pp. 152-162, 2017. (Shanghai, China, December 16-18, 2017: Our presentation was on December 17.)

3. Hiroki Osawa, Akira Suzuki, Takehiro Ito, and Xiao Zhou, Complexity of Coloring Reconfiguration under Recolorability Constraints, In Proceedings of the 28th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2017), Leibniz International Proceedings in Informatics, Vol. 92, pp. 62:1-62:12, 2017. (Phuket, Thailand, December 10-12, 2017: Our presentation was on December 10.)

4. Tatsuhiko Hatanaka, Takehiro Ito, and Xiao Zhou, Parameterized Complexity of the List Coloring Reconfiguration Problem with Graph Parameters, In Proceedings of the 42nd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2017), Leibniz International Proceedings in Informatics, Vol. 83, pp. 51:1-51:13, 2017. (Aalborg, Denmark, August 21-25, 2017: Our presentation was on August 22.)

5. Hiroki Osawa, Akira Suzuki, Takehiro Ito, and Xiao Zhou, The Complexity of (List) Edge-Coloring Reconfiguration Problem, In Proceedings of the 11th International Conference and Workshops on Algorithms and Computation (WALCOM 2017), Lecture Notes in Computer Science, Vol. 10167, pp. 347-358, 2017. (Hsinchu, Taiwan, March 29-31, 2017: Our presentation was on March 30.)

6. Haruka Mizuta, Takehiro Ito and Xiao Zhou, Reconfiguration of Steiner Trees in an Unweighted Graph, In Proceedings of the 27th International Workshop on Combinatorial Algorithms (IWOCA 2016), Lecture Notes in Computer Science, Vol. 9843, pp. 163-175, 2016. (Helsinki, Finland, August 17-19, 2016: Our presentation was on August 17.)