

令和元年6月20日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K00034

研究課題名(和文) レベル依存するM/G/1型マルコフ連鎖の新解法と待ち行列モデルへの応用

研究課題名(英文) A new solution method for level-dependent Markov chains of M/G/1 type and its application to queueing models

研究代表者

滝根 哲哉 (Takine, Tetsuya)

大阪大学・工学研究科 教授

研究者番号：00216821

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：レベル依存するM/G/1型マルコフ連鎖とは、非負整数値を取るレベル変数と、レベル変数を取る値が与えられたとき、その値に依存する有限集合から値を取る相変数の組を状態とする2変数マルコフ連鎖において、1回の遷移でレベル変数が高々一つしか減少しないという性質を持つものの総称である。本研究では、レベル依存するM/G/1型マルコフ連鎖の定常分布に対する新たな数値計算法を確立した。この数値計算法の背後にある理論は厳密なものであり、従来の数値計算法で仮定されていた仮定を全て排除した、任意のレベル依存するM/G/1型マルコフ連鎖に適用可能なものとなっている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の学術的意義は、マルコフ連鎖の定常分布を不等式系の解として特徴づけたところにある。マルコフ連鎖の定常分布は、大域平衡方程式と呼ばれる連立方程式の解として与えられるが、本研究ではその解がある不等式系の解として特徴づけ、この観察を基に数値計算アルゴリズムを開発した。また、従来の数値計算法で仮定していた付加的な仮定を排除しており、適用範囲が格段に広がった。

研究成果の概要(英文)：Markov chains of level-dependent M/G/1 type is a class of bivariate Markov chains with countably infinite levels and finite phases in each level, where the level variable can decrease only by one when the state transition occurs. In this research, we established the computational algorithm for the stationary distribution of Markov chains of level-dependent M/G/1 type. Particular features of this algorithm are as follows. It is based on the theory without any heuristics/approximation, and it is applicable any Markov chains of level-dependent M/G/1 type, in contrast to the existing ones, where additional assumptions on the transition structure are imposed.

研究分野：待ち行列理論

キーワード：M/G/1型マルコフ連鎖 レベル依存 数値計算法 再呼のある待ち行列 途中退去のある待ち行列

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

M/G/1 型マルコフ連鎖に関する研究は、80 年代後半から 90 年代にかけて非同期転送モード (ATM) と呼ばれる情報伝送方式の普及と共に急速に進展し、現在では、相の状態集合が有限であり、かつ各レベルからの遷移構造が同質である場合について、定常状態確率の効率的な数値計算アルゴリズムが確立されている。待ち客の途中退去や再呼のある待ち行列モデルにおける系内客数過程も M/G/1 型マルコフ連鎖として定式化されるが、各レベルからの遷移構造がそのレベルに依存するため、従来の同質性をもつ M/G/1 型マルコフ連鎖に対する数値計算アルゴリズムを適用することができない。現時点において知られているレベル依存する M/G/1 型マルコフ連鎖に対する解法は、同質性をもつ場合の解法を盲目的に拡張したものや、状態空間を切断することで有限状態マルコフ連鎖として近似的に再定式化し、汎用のアルゴリズムを適用する手法しか知られていない。すなわち、大規模なモデルにおける定常状態確率が計算可能な、一般の M/G/1 型マルコフ連鎖に対する数値計算アルゴリズムは全く報告されていないのが現状である。

### 2. 研究の目的

本研究課題の目的は、レベル依存する M/G/1 型マルコフ連鎖の定常状態確率に対して、大規模なモデルも扱うことが可能な従来とは全く異なる新解法の開発と、それを基にして、待ち客の途中退去や再呼がある待ち行列モデルを含む、従来の手法では扱うことが困難であった様々な待ち行列モデルの解析手法を確立することである。待ち客の途中退去や再呼のある待ち行列モデルには多数の変種があるが、これらのモデルに対する従来の研究では、モデル毎の特徴を利用して、場当たりのアプローチが取られてきた。上で述べたように、これらのモデル群における系内客数分布はレベル依存する M/G/1 型マルコフ連鎖として定式化できるため、後者に対する効率的かつ大規模なモデルの扱いが可能な数値計算アルゴリズムを開発することで、これらのモデル群を統一的に扱う枠組みを構築することを第一の目的とする。さらに、本研究課題で開発する数値計算アルゴリズムを基にして、待ち客の途中退去や再呼のある待ち行列モデル群の解析を進める。そこでは、系内客数分布のみならず、途中退去率や待ち時間分布の解析も合わせて行い、従来の手法では扱うことが困難であった、平均系内客数が 1,000 人以上となるような大規模なモデルにおけるシステムの振る舞いを明らかにすることを目的とする。

### 3. 研究の方法

まず初めに、レベル依存する M/G/1 型連続時間マルコフ連鎖がある条件を満たす特別な場合について数値計算アルゴリズムを構築し、数値計算実験を通じてアルゴリズムの性能を詳細に調査した。さらに、初期検討で課した条件を排除した一般的な枠組みに適用可能な数値計算アルゴリズムを構築し、数値計算実験を通じてアルゴリズムの汎用性並びに性能を詳細に調査した。具体的には以下のとおりである。

まず、既約で正再帰的なレベル依存する M/G/1 型連続時間マルコフ連鎖において、レベルが一つ下がる遷移を表現するブロック行列があるレベル以上では全て正則であるという条件の下で定常状態確率の数値計算アルゴリズムの構築し、数値実験を通してその性能の詳細な検討を行った。なお、この条件を満たす待ち行列モデルには無限サーバ待ち行列 BMAP/M/ や待ち客の途中退去がある BMAP/M/c+M 等があるが、応募者の知る限り、これらのモデルに対する大規模な数値計算例は今まで報告されたことがない。

続いて、初期検討で課した正則性条件を取り除いた、一般のレベル依存する M/G/1 型連続時間マルコフ連鎖の定常状態確率に対する数値計算アルゴリズムを検討した。初期検討で導入した正則性条件が成立しない場合、アルゴリズムの鍵となる行列は容易に定まらない。しかし、この行列の確率的意味を足がかりに、初期検討で開発したものと同様の数値計算アルゴリズムを構築した。

### 4. 研究成果

本研究の独自性は、マルコフ連鎖の定常分布を不等式系の解として特徴づけるところにある。マルコフ連鎖の定常分布は、大域平衡方程式と呼ばれる連立方程式の解として与えられるが、本研究ではその解のある不等式系の解として特徴づけ、この観察を基に数値計算アルゴリズムを開発した。また、従来の数値計算法で仮定していた付加的な仮定を排除しており、適用範囲が格段に広がった。具体的には以下のとおりである。

本研究課題で開発したレベル依存する M/G/1 型マルコフ連鎖の定常状態確率に対する数値計算アルゴリズムでは、状態空間の切断は一切行わず、マルコフ連鎖がもつ構造全体をそのまま利用するという、従来とは全く異なるアプローチを取っている。通常、定常状態確率は連立一次

方程式の唯一解で特徴付けられるが、この新しいアプローチをレベル依存する M/G/1 型マルコフ連鎖の特別な場合に適用すると、定常状態確率を無限個の連立一次不等式の唯一解を通じて特徴付けると等価になる。マルコフ連鎖の定常状態確率を連立一次不等式の唯一解を通じて特徴付ける研究は過去に無く、非常に斬新なアプローチである。本研究で開発された数値計算アルゴリズムの基礎をなす定理は、G/G/1 型と呼ばれるより一般的なマルコフ連鎖においても適当な条件下で成立すると推測されるため、本研究課題の成果は、M/G/1 型よりも遙かに一般的な構造化されたマルコフ連鎖の解法へと繋がっていく可能性がある。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 2 件)

1. M. Kimura and T. Takine, "Computing the Conditional Stationary Distribution in Markov Chains of Level-Dependent M/G/1-Type," *Stochastic Models*, vol.34, no.2, pp.207-238, 2018 (査読あり).

2. T. Takine, "Analysis and Computation of the Stationary Distribution in a Special Class of Markov Chains of Level-Dependent M/G/1-Type and Its Application to BMAP/M/ and BMAP/M/c+M Queues," *Queueing Systems*, vol.84, nos.1-2, pp.49-77, 2016 (査読あり).

〔学会発表〕(計 0 件)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年：  
国内外の別：

取得状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等：なし

## 6. 研究組織

(1)研究分担者 なし

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号 (8 桁)：

(2)研究協力者 なし

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。