

令和 2 年 5 月 27 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2019

課題番号：16K00040

研究課題名（和文）縮小型事前分布によるベイズ推測と統計的決定理論

研究課題名（英文）Bayesian inference and decision theory under shrinkage priors

研究代表者

丸山 祐造（Maruyama, Yuzo）

東京大学・大学院総合文化研究科・教授

研究者番号：30304728

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：多変量正規分布の平均ベクトルの推定問題を考えた。特に尺度母数も未知であるのがこの研究の特徴であり、損失関数は尺度で調整された二乗損失関数を想定した。広義の事前分布のもとでの一般化ベイズ推定量の許容性は、狭義の事前分布のもとでのベイズ推定量の許容性とは違って、十分研究されてこなかった。そのような問題に対して、推定量のクラスを制限した上で許容的な推定量を提案した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

データの背後に確率的な構造を想定する統計的モデルはデータから有用な結論を導くために広く使われている手法である。その中でも正規分布モデルは最も基本的であり、まず最初に妥当性が検討される重要なモデルである。そのパラメータ推定（特に平均）は長い歴史があり、多くの理論的な蓄積がある。しかし、その問題設定の簡単さにも関わらず理論的解明が不十分な問題が残されていた。そのような問題に対して、縮小型事前分布のもとでのベイズ推定量が理論的良さを持つことを示した。

研究成果の概要（英文）：We have studied admissibility of generalized Bayes estimators of a multivariate normal mean vector, θ , in the presence of an unknown scale, σ , under scaled squared error loss. We find classes of generalized Bayes estimators that are admissible within the class of equivariant estimators.

研究分野：統計学

キーワード：統計学 ベイズ統計学 統計的決定理論

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

線形回帰モデルは、多変量統計解析を行う上での最も基本的な統計モデルである。また、複雑なデータ構造を表現し得る非線形モデルの中にも、スプライン回帰モデルのように、いくつかの非線形関数の線形結合として表現される例は多い。従って、計算機が高度に発達した現代においても、線形回帰モデルは依然として多変量統計解析の中で重要な位置を占めている。

本研究では、理論的立場から線形回帰モデルにおける統計的推測問題を考える。特に、その重要性・有効性が明らかになってきた縮小型事前分布を用いたベイズ統計的推測手法に照準を絞る。統計的決定理論の立場からその良さを解明することが本研究の最大の目的である。特に、推定問題において一般化ベイズ推定量が許容であるための十分条件について、以前から取り組んでいた未解決問題の解決を目指す。また、近年解明されつつある予測問題におけるスタイン現象の完全な理解を目指す。

2. 研究の目的

線形回帰モデルにおける統計的推測問題において、特にその重要性・有効性が明らかになってきている縮小型事前分布をベイズ統計的推測手法に照準を絞る。もちろん回帰分析の文脈では、リッジ回帰分析が縮小型推測手法として、まず想定されるが、必ずしもリッジ回帰分析だけに焦点を絞らず、縮小型推測手法一般について、いわゆる統計的決定理論の観点から理論的性質を解明していくことが本研究の大きな目的である。本研究では主に、誤差項に正規性を仮定した正規線形回帰モデルを想定する。そして統計的推測として、推定、予測、変数選択を扱う。具体的には、有限個のデータが得られたもとで、以下の典型的な統計的推測の問題設定を考える。

【推定】回帰係数ベクトルの関数の推定、誤差分散の推定

【予測】新たな有限個の説明変数が得られたときに、対応する目的変数に関する予測分布の構成

【変数選択】無駄な変数を含む利用可能な全ての説明変数を与えられていると想定した場合の、データに照らして妥当な説明変数の組み合わせの選択

それぞれにおいて理論的にも実用的にも優れた推測方法の提案を目指す。特に変数選択においては、説明変数の数が非常に多いという現代的な設定にも対応する。

3. 研究の方法

過去に受領した科研費では、本研究テーマと深く関連した研究テーマを扱った。その研究費を使って、アメリカの複数の研究者を訪問して、共同研究を行ってきた。近年の業績の多くがその共同研究の成果である。本研究においても、そのスタイルでの共同研究を継続する。そのため研究費のかなりの部分を旅費に当てる。また、海外の学会、研究会で研究成果を発表し、同分野の専門家と議論することにより、さらに研究を進展させる。その旅費にも研究費を充当する。

4. 研究成果

(1) Zellner の g -prior は、正規線形回帰モデルの変数選択問題をベイズ的に考えるとき、標準的な事前分布の一つである。 g は正規分布の分散であり、さらに g に事前分布を想定する階層型分布が hyper- g として、2000 年代に研究されていた。Maruyama and George (2011, *Annals of Statistics*) は g への事前分布の超母数の選び方を工夫すると、通常積分で表現される周辺尤度が解析的に計算できることを示した。explicit に記述された周辺尤度は理論的考察において大きなアドバンテージがある。特に回帰モデルの説明変数の数が非常に多い現代的な設定における漸近的な理論結果を考察した。より具体的には説明変数の数がサンプル数のべき乗のオーダーの場合の一致性を考察した結果が、Min Wang and Yuzo Maruyama (2016, *Bernoulli*) 及び Min Wang and Yuzo Maruyama (2018, *Journal of Statistical Planning and Inference*) に掲載された。

(2) 多変量正規分布のもとでのベイズ予測分布は多くの研究者によって研究されてきた。特にカルバック・ライブラー距離のもとでのベイズ予測分布の研究、特に統計的決定理論のもとで、平均ベクトルの次元が 3 以上の場合にスタイン現象が生じる点に着目した研究として、Komaki (2001), George et al. (2006) がある。また、逆カルバック・ライブラー距離のもとでは、予測問題は推定問題に帰着する。もちろんこの場合にもスタイン現象が生じることはよく知られた事実である。従って、カルバック・ライブラー距離と逆カルバック・ライブラー距離をつなぐ α -divergence 距離のもとでも、スタイン現象が生じ、また調和型事前分布を始めとする縮小型事前分布が改良のために有効であることが予想される。一方で、 α -divergence 距離の関数の形は、カルバック・ライブラー距離に比べて複雑であり、取り扱いが難しい。我々はリスクの差を平均値の定理を用いて表現すること、及びいわゆるスタイン等式(ガウスの発散定理)、及び熱方程式により、スタイン現象が生じるための十分条件を導出した。また、熱方程式への依存は本質的ではなく、スタイン等式のみで証明できることも確認した。これらの結果は Maruyama, Matsuda and Ohnishi (2019, *IEEE Transactions on Information Theory*) に掲載された。

(3) 尺度母数が未知のもとでの球対称分布における平均ベクトルの推定問題を考えた。ここで、球対称分布の仮定は多変量正規分布の一般化であり、過去の研究において統計的決定理論に関する種々の性質に関する頑健性が示されてきた。また、誤差項を正規分布から球対称分布に一般化した場合の線形回帰モデルの canonical form でもある。

この設定において尺度母数が未知で攪乱母数であることが問題の取り扱いを難しくしており、特に許容性についての結果はほとんど知られていない。尺度母数が既知の場合に、特に正規性の仮定のもとで、ほぼ完全な結果が50年前に得られていること(特にBrown (1971, *Annals of Mathematical Statistics*))と対照的である。考える推定量のクラスをある共変性を満たすクラスに制限した上での許容性を考察した。特にそのような共変性を導く性質の良い縮小型事前分布のもとでの一般化ベイズ推定量が制限されたクラスにおいて許容的であるための十分条件を提案できた。また、許容性だけでは良い推定量の基準としては弱い、さらに上記のサブセットがミニマクス性も併せ持つ推定量であることを示した。一連の結果の特別な場合は、次の通りである。「 $X \sim N_p(\mu, \sigma^2 I_p)$, $S \sim \chi^2_{n-2}$ で損失関数 $\|x - \mu\|^2 / \sigma^2$ のもとでの推定問題を考える。このとき、James-Stein 推定量の縮小係数を少しいじった $[1 - \{(p-2)/(n+2)\} / \{\|x\|^2 / s + (p-2)/(n+2) + 1\}]x$ が、ある広義事前分布のもとで一般化ベイズ推定量である。さらにこの推定量は、ある共変性を満たす推定量のクラス $\{1 - (\|x\|^2 / s)\}x$ の中で許容的であり、またミニマクスでもある。」我々が導出した許容性とミニマクス性の結果により、縮小推定量を使いたい場面で、理論的に良い性質を保持し、かつ非常に簡便な推定量を使えることになった点が評価できる。またこれらの結果が正規性の仮定を外した球対称分布のもとでもある程度成立する点も興味深い。これらの結果は Maruyama and Strawderman (2020, *Annals of Statistics*, 以下 MS2020) に掲載された。また、Maruyama and Strawderman (2017, *Journal of Multivariate Analysis*) は、MS2020 の結果を目指す足がかりとなった論文である。多くの結果は MS2020 で置き換えられているが Stein 等式の扱いなどこの論文独自の結果も含まれる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 Yuzo Maruyama, William E. Strawderman	4. 巻 48
2. 論文標題 Admissible Bayes equivariant estimation of location vectors for spherically symmetric distributions with unknown scale	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annals of Statistics	6. 最初と最後の頁 1052-1071
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1214/19-AOS1837	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Wang Min, Maruyama Yuzo	4. 巻 196
2. 論文標題 Posterior consistency ofg-prior for variable selection with a growing number of parameters	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Planning and Inference	6. 最初と最後の頁 19 ~ 29
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jspi.2017.10.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Maruyama Yuzo, Strawderman William E.	4. 巻 162
2. 論文標題 A sharp boundary for SURE-based admissibility for the normal means problem under unknown scale	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Multivariate Analysis	6. 最初と最後の頁 134 ~ 151
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmva.2017.09.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Maruyama Yuzo, Matsuda Takeru, Ohnishi Toshio	4. 巻 65
2. 論文標題 Harmonic Bayesian Prediction Under α -Divergence	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 IEEE Transactions on Information Theory	6. 最初と最後の頁 5352 ~ 5366
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1109/TIT.2019.2915245	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Wang Min、Maruyama Yuzo	4. 巻 22
2. 論文標題 Consistency of Bayes factor for nonnested model selection when the model dimension grows	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Bernoulli	6. 最初と最後の頁 2080 ~ 2100
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3150/15-BEJ720	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 Yuzo Maruyama
2. 発表標題 Ensemble minimaxity of James-Stein estimators
3. 学会等名 the "New and Evolving Roles of Shrinkage in Large-Scale Prediction and Inference" workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuzo Maruyama
2. 発表標題 Ensemble minimaxity of James-Stein estimators
3. 学会等名 Symposium in Memory of Charles Stein (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuzo Maruyama
2. 発表標題 Harmonic Bayesian prediction under alpha-divergence
3. 学会等名 The 1st International Conference on Econometrics and Statistics (EcoSta 2017) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuzo Maruyama
2. 発表標題 Equivariant Admissibility for the Normal Means Problem Under Unknown Scale
3. 学会等名 The Third Annual Kliakhandler Conference: International Conference on Bayesian Inference in Statistics and Statistical Genetics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuzo Maruyama
2. 発表標題 Harmonic Bayesian prediction under alpha-divergence
3. 学会等名 International Conference on Statistical Distributions and Applications (ICOSDA 2016) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Yuzo Maruyama
2. 発表標題 Harmonic Bayesian prediction under alpha-divergence
3. 学会等名 9th International Conference of the ERCIM WG on Computational and Methodological Statistics (CMStatistics 2016) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Yuzo Maruyama webpage https://yuzo-maruyama.github.io/

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----