

令和 2 年 6 月 5 日現在

機関番号：16201

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2019

課題番号：16K00073

研究課題名（和文）平衡実現打ち切り法の拡張と電磁界解析への応用

研究課題名（英文）Extension of Balanced Truncation and Application to Electromagnetic Analysis

研究代表者

丹治 裕一（Tanji, Yuichi）

香川大学・創造工学部・教授

研究者番号：10306988

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：高速電子システムでは、配線に起因する伝送線路効果が回路全体の動作を制限するため、配線の大規模な等価回路モデルを小さなシステムで表現するモデル低次元化が注目されている。その方法の中で、確率的平衡実現打ち切り法は精度に優れているが、その適用は小規模システムに限定されていた。本研究では大規模な回路に適用できるよう本手法の拡張を行った。提案した方法では、回路の本質的な特徴である受動性が保存され、確率的平衡実現打ち切り法の欠点である低周波数帯における精度が良好に保たれる特徴がある。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で提案されたモデル低次元化は、集積回路・パッケージ・プリント基板における配線の電磁界特性に等価な線形回路に適用される。それゆえ、本研究は様々な電子機器の発展に寄与することになる。近年、自動車・産業機器など、安全かつ環境に優しいことが盛んに言われている。それを達成するためには内部のパワーエレクトロニクス回路を最適に設計する必要があり、インダクタや配線の影響を考慮して、低消費電力化することや電磁界干渉の影響を軽減することが必要となる。この場合に、提案したモデル低次元化はその影響を考慮した回路シミュレーションに有効となるであろう。

研究成果の概要（英文）：Researchers have paid attention to model order reduction that expresses large-scale equivalent circuit models into a small system, because the transmission line effects of wiring in high-speed electronics systems limit the performances. Of those methods, though stochastic balanced truncation is accurate, its application is restricted to a small system. Here, we improve this method to apply it to large-scale networks. In the proposed method, the passivity of the reduced-order models, which is an essential property of linear circuit, is preserved and the accuracy in the low-frequency band is maintained well, which improves the weakness of balanced truncation.

研究分野：電子情報工学

キーワード：ハイパフォーマンスコンピューティング システムオンチップ シミュレーション工学 高速伝送回路設計

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

集積回路の微細化が進むにつれて配線の伝送線路効果が顕著となり、それに伴う信号の遅延、漏話、反射が回路全体の動作を制限するようになった。一方、配線は膨大な数の寄生 RLC 素子によってモデル化されるため、伝送線路効果を考慮した集積回路の解析は、回路シミュレータの解析能力を超えていた。そこで、システムの低次元化手法を適用して、配線のモデルである大規模 RC 及び RLC 回路を小規模の線形回路に置き換えて解析することが行われ、システムのモデル低次元化に注目が集まった。その中で、確率的平衡実現打ち切り法は、線形回路の性質である受動性を保証しながら、精度の良い低次元化モデルを与える方法として知られるようになった。その一方で、適用できるシステムが小規模に限定されることが問題とされてきた。

### 2. 研究の目的

本研究では確率的平衡実現打ち切り法を、大規模な線形回路のモデル低次元化に適用できるように、回路行列のスパース性を考慮して拡張する。ここで、回路の本質的な特徴である受動性を保存することで、低次元化モデルを使用した回路シミュレーションの安定性を保証する。さらに、提案手法を電磁界システムのモデリングへと応用する。

### 3. 研究の方法

(1)回路の安定性及び双対性を考慮した平衡実現打ち切り法について検討を行った[1]。平衡実現打ち切り法では、リャプノフ方程式の求解に多くの計算コストが必要であり、これを軽減するために ADI 法の適用を行った。ただし、リャプノフ方程式の係数行列が蜜行列である場合には大規模な問題に適用することができない。リャプノフ方程式の係数行列は状態方程式の係数行列と同じであるため、RC 及び RLC 回路の回路方程式をそのスパース性を損なうことなく状態方程式に変換することが重要である。自動制御の分野では、回路方程式のような系をデスクリプタシステムと呼ぶ。そして、デスクリプタシステムを状態方程式に変換する一般形として、特異値分解(SVD)を用いた SVD 形式が知られている。一般に SVD は蜜行列の演算であるが、これを対称行列のコレスキー分解に類似した LDL 分解を用いて、スパースな情報を保ったまま SVD 形式に変形する方法を提案した。これにより、平衡実現打ち切り法を大規模な回路にも適用できるように拡張を行った。

提案した方法では、RC 回路の受動性及び双対性が低次元化後も保存される。これについての証明を与えた。また、RLC 回路については、双対性が保存できることを示した[1]。例題において、モデル低次元化において最も有力なアルゴリズムである PRIMA と比較を行った。

(2)文献[1]で提案した平衡実現打ち切り法では、RLC 回路の受動性を保存することができなかった。そこで、受動性を保存するために、リャプノフ方程式の代わりにリカッチ方程式を求解する確率的平衡実現打ち切り法の提案を行った。ここで、本手法が適用できる範囲を拡張するために、回路行列を散乱行列に変換した後に、有界性を保存した平衡実現打ち切り法を適用して、これをインピーダンス行列に戻すことで受動性を保存する方法を提案した。本手法では回路の双対性も保存されており、研究方法(1)を RLC 回路へ拡張した内容となっている[2]。ここで、リカッチ方程式の求解には多くの計算コストが必要であるため、この計算コストを軽減するために、コレスキー分解 QADI の拡張を行った。例題において、PRIMA と精度、演算効率について比較を行った。

(3)線形受動の RC あるいは RLC 回路をデスクリプタシステムで表すと、指数 1, 2 のいずれかを持つことになる。指数 2 は  $sF$  のような  $s$  に関する項が伝達関数に含まれることに相当する。それゆえ、リカッチ方程式を定義することが困難となるため、一般化リカッチ方程式を用いた平衡実現打ち切り法について検討を行った。まず、指数 2 の場合において、回路方程式をストークス型の標準形で表現し、閉じた形で表現されているスペクトル射影を用いて一般化リカッチ方程式を得る方法を提案した。ここで、一般化リカッチ方程式の係数行列はスパースな形で表現されている。次に、一般化リカッチ方程式を効率良く解くコレスキー分解 QADI の検討を行った。ADI アルゴリズムの効率は、シフトパラメータと呼ばれるパラメータの選び方に大きく依存する。ここで、実数及び複素共役のシフトパラメータを取った場合には、一般化リカッチ方程式の解は非負値対称であることを証明した。すなわち、提案した QADI アルゴリズムは破綻することなく一般化リカッチ方程式の近似解を得ることができる。

近年、QADI アルゴリズムはそれよりも効率の良い RADi に等価であることが示されている。そこで、提案した QADI と RADi について比較を行なった。また、RADi の原著論文では残差誤差の少ない一般化リカッチ方程式の解が得られるように、シフトパラメータが考慮されている。しなしながら、これがモデル低次元化には必ずしもふさわしいとは言えないことを示した[3]。すなわち、回路に関するモデル低次元化では、低周波帯域で精度の良いモデルを得ることが目的であり、RADi の原著論文の考え方が必ずしも適用できない。そこで、低周波帯域で精度の良い低次元化モデルを得るために、小さな定数をシフトパラメータに用いることを提案した。例題によって、この有効性が示されている。

(4)確率的平衡実現打ち切りは、伝達関数  $Z(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$  に対してリカッチ方程式を定義する。しかしながら、回路のモデリングを対象にした場合には、行列  $D$  が正則ではなく(一般化)リカッチ方程式が定義できない場合がある。そこで、 $D+\epsilon I$  のように小さな実数  $\epsilon$  を与えて正則化し、リカッチ方程式を定義する。リカッチ方程式を解くには、ハミルトニアン行列の固有値を求める必要があるが、回路が受動である場合にはリカッチ方程式の解は非負であるため、その固有値は負にならない。しかしながら、小さな実

数  $\varepsilon$  を与えた場合には、ハミルトニアン行列に小さな負の固有値が現れ、平衡実現打ち切りを実行することができない。そこで、負の固有値を補償しながら、確率的平衡実現打ち切りを行う方法を提案した[4]。

(5) 確率的平衡実現打ち切り法、リカッチ方程式及びその解法に関する文献調査を行った。その結果、RADI や QADI ではリカッチ方程式の低ランク解を求めるが、これを平衡実現打ち切りに用いた場合には、理論的に低次元化モデルの受動性を保証できないことが分かった。一方、回路が大規模になった場合には、RADI や QADI を用いたとしても、安定解そのものを求めることは困難である。そこで、PRIMA と同様に双変換を用いてリカッチ方程式を低次元化する方法を提案した。この方法ではリカッチ方程式の低ランク解を用いるだけでなく、リヤプノフ方程式の低ランク解を用いることによって、受動性を確保した低次元化モデルを作成することができる。ここで、受動性の保証に関しては、理論的な証明を与えている。本手法は、Krylov 部分空間法を用いた PRIMA と根本においては同一であるが、変換行列を求めることに違いがある。例題において、低周波帯域だけでなく高周波帯域にも良好な精度の低次元化モデルが得られることを示した。

#### 4. 研究成果

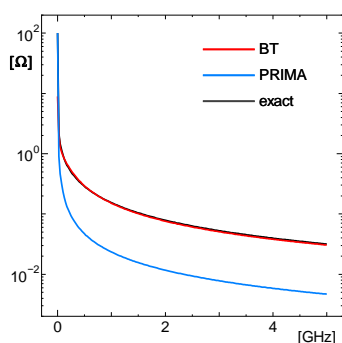


図 1 RC 回路の低次元化

(1) 研究方法(1)で述べた方法を用いて、RC 回路のモデル低次元化を行った。例題は、一様な 100 個の RC 部分回路からなる梯子型回路の 2 ポート入出特性であり、低次元化前の次元は 101 である。図 1 に入力ポートに関するインピーダンス行列の周波数応答を示す。ここで、BT は平衡実現打ち切り、PRIMA は Krylov 部分空間法である PRIMA、exact は低次元化なしの結果をそれぞれ示す。ここで、BT 及び PRIMA では低次元モデルの次元は 4 である。図 1 より平衡実現打ち切りを用いると、低次元化なしの場合とほぼ一致しているが、PRIMA の結果は低周波帯域でのみ一致しており、周波数が高くなると応答が異なっていることが分かる。この結果より、平衡実現打ち切り法が PRIMA に比べ精度が良いことが分かる。

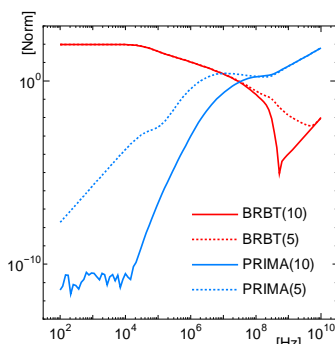


図 2 RLC 回路の低次元化

(2) 研究方法(2)で述べた方法を用いて、RLC 回路のモデル低次元化を行った。例題は、一様な 100 個の RLC 部分回路からなる梯子型回路の 2 ポート入出特性であり、低次元化前の次元は 301 である。図 2 に周波数応答の誤差を示す。ここで、誤差は低次元化前後の差の行列ノルム(最大固有値)で評価した。ここで、BRBT は確率的平衡実現打ち切り法を、PRIMA は Krylov 部分空間法を示している。カッコ内は低次元化した次元を表している。図 2 より、PRIMA は低周波帯域における精度が良いのに対して、平衡実現打ち切りは高周波帯域において精度が良い。平衡実現打ち切り法は、すべての周波数に対する最大の誤差ノルムを最小化する方法であり、この最大の誤差ノルムはある高周波での誤差に対応していると考えられる。一方、Krylov 部分空間法は、本質的に複素平面の原点におけるテイラー展開を用いた伝達関数の近似であり、これが低周波帯域で精度が良い理由である。

表 1 に大規模な RLC 回路に対する計算時間の比較を示した。提案した平衡実現打ち切りは、計算時間、メモリ容量ともに、PRIMA とほぼ同等であることが分かる。それゆえ、高周波帯域での精度が必要である場合には、確率的平衡実現打ち切り法は有効であると言える。

表 1 計算時間の比較

回路の次元	平衡実現打ち切り		PRIMA	
	計算時間 [s]	メモリ [MB]	計算時間 [s]	メモリ [MB]
30,001	4.27	6.09	3.30	4.89
300,001	52.0	$9.35 \times 10^1$	33.1	$4.81 \times 10^1$
3,000,001	410.8	$5.80 \times 10^2$	322.0	$4.81 \times 10^2$
30,000,001	4,893	$7.48 \times 10^3$	3,255	$1.16 \times 10^4$

(3) 研究の方法(3)で述べたリカッチ方程式の残差と低次元化モデルの周波数誤差の関係を図 3 に示す。ここで、用いた例題は図 2 と同様である。QADI あるいは RADI において各ステップにおけるシフトパラメータをハミルトニアン行列の固有値を用い、非零の固有値の数だけ QADI のステップを取るとリカッチ方程式の安定解が得られる。ここで、図 3(a)で eig\_1 は絶対値が大きい順に固有値を取った場合であり、eig\_0 は小さい順に取った場合である。図 3(a)より、絶対値

が大きい固有値を用いるとリカッチ方程式の残差を速く零に近づけられることが分かる。一方、得られた低ランクのリカッチ方程式の解を用いて低次元化モデルを作成し、周波数応答を計算した結果が図 3(b)である。この図より、ハミルトニアン行列の大きな固有値を取ると、高周波帯域での精度が良好となるが低周波数帯域での精度は良好でない。また、小さな固有値を取るとその逆の状況が生じる。すなわち、ハミルトニアン行列の固有値の絶対値が、精度の良い周波数帯域に関係している。

大規模な問題では固有値分解を適用することはできないため、Krylov 部分空間法によって固有値を近似的に求める必要がある。図 3(c)の kry\_lrg, kry\_sml は、それぞれ、絶対値が大きな固有値及び小さな固有値を用いて低次元化モデルを作成し、周波数応答の誤差を求めた結果である。いずれも低周波数帯域における精度が良好でない。そこで、小さな負の定数 $-10^{-3}$ をシフトパラメータに用いた場合の周波数応答の誤差を const に示す。この値を用いることで低周波数帯域における精度が良好となっていることが分かる。そこで、先の Krylov 空間で求めた固有値に小さな負の定数をシフトに加えた場合の応答を kry\_lrg\_c, kry\_sml\_c に示す。ここで、それぞれ kry\_lrg, kry\_sml に対応している。すなわち、この小さな負の定数をシフトパラメータに用いることで、周波数帯域全般に渡って周波数応答の誤差を小さくすることができている。この値を用いても演算効率には影響しないため、表 1 の演算効率の比較はこの場合にも有効な結果である。

また、RADI を用いることで約 6.6 倍の高速化が可能である[4]。RADI と QADI は同じリカッチ方程式の近似解を与えるため、精度は同じである。

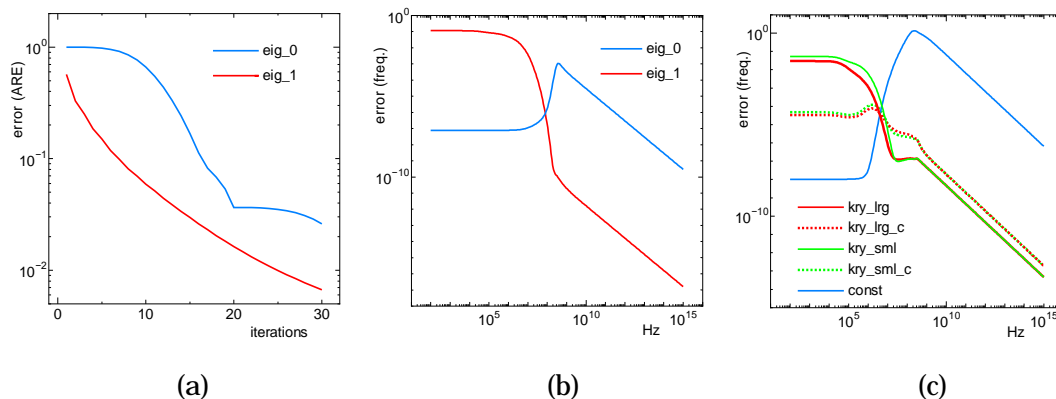


図 3 リカッチ方程式の残差誤差と低次元化モデルの周波数誤差の関係

(4)パッケージのモデリングに用いられている平面回路のモデルに、研究の方法(4)で述べた方法を適用した。その場合のリカッチ方程式の解の固有値のヒストグラムを図 4 に示す。平衡実現打ち切りでは、ハンケル特異値を基準にして低次元化モデルが作成される。図 4(a)は打ち切りを行わない場合であり、図 4(b)、図 4(c)は打ち切りを行った場合である。ハンケル特異値の基準を大きくすると、最終的に図 4(c)のように負の固有値は発生しなくなる。すなわち、システムが受動であることが保証されるようになる。 $D+\epsilon I$ のように置かず平衡実現打ち切りを実行する方法も提案されているが、この場合には係数行列が密行列となり、リカッチ方程式の求解の計算コストも高いため、大規模問題の適用は困難になる。それゆえ、提案した方法は効率の観点から有益な方法と言える。

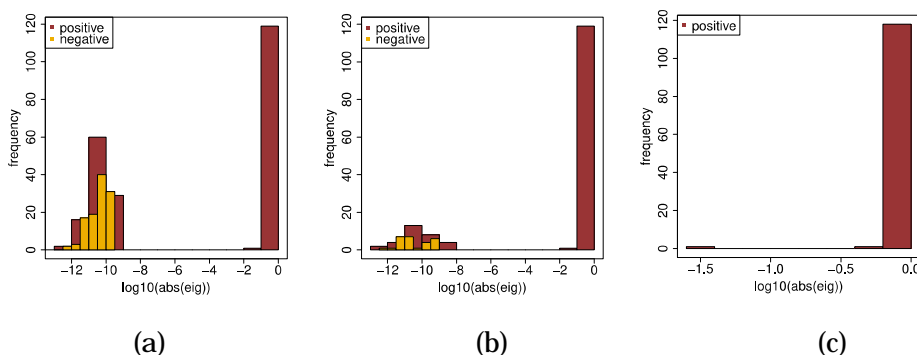


図 4 リカッチ方程式の解の固有値の分布

(5)研究の方法(5)では、双対性を保存しない形でデスクリプタシステムを記述した後に、リカッチ方程式を解く(RADI)、リヤプノフ方程式を解く(ADI)、Krylov 部分空間法を適用する(Arnoldi)

のいずれかを行って直交射影を作成する。次に、これを用いて低次元化したリカッチ方程式を求めた後に、平衡実現打ち切りによって低次元化モデルを得る。図 5(a)に指数1の場合、図 5(b)に指数2の場合の周波数応答の誤差を示す。ここで、RPRBT は研究の方法(4)の方法である。この例題は大規模な問題ではないため、リカッチ方程式の安定解を数値的に得ることができ、双対性も保証することができる。図 5より、指数1, 2のいずれの場合も、PRIMA は高周波帯域で誤差が大きい。一方、RADI, ADI, Arnoldi を見ると、リカッチ方程式を解くことで必ずしも誤差が小さくなるとは限らないことが分かる。すなわち、リカッチ方程式を縮退するために必ずしも原システムのリカッチ方程式を解く必要がないことは、演算効率が改善できる意味でメリットが大きいと考えられる。

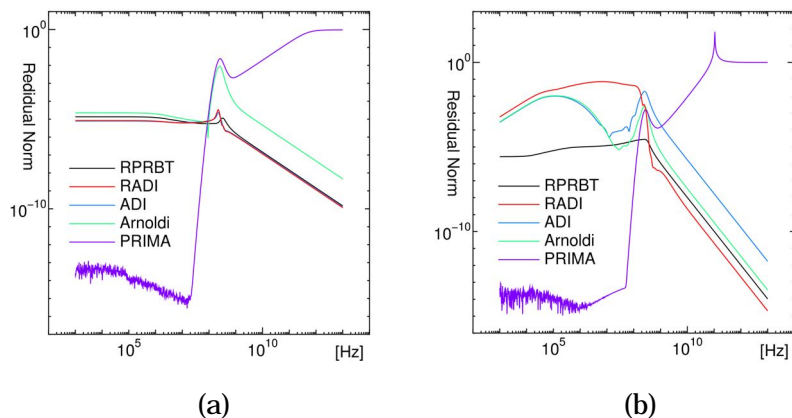


図 5 低次元化モデルの誤差の比較

< 引用文献 >

- [1]. Y. Tanji, "Efficient Balanced Truncation for RC and RLC Networks," IEICE Trans. on Fundamentals, vol. E100-A, no. 1, pp. 266-274, 2017.
- [2]. Y. Tanji, "Bounded Real Balanced Truncation of RLC Networks with Reciprocity Consideration," IEICE Trans. on Fundamentals, vol. E100-A, no. 12, pp. 2816-2823, 2017.
- [3]. Y. Tanji, "Low-Rank Solutions of Riccati Equations for Positive Real Balanced Truncations of RLC Networks," Nonlinear Theory and Its Applications, vol. 9, no. 4, pp. 479-496, 2018.
- [4]. Y. Tanji, "Reciprocal and Positive Real Balanced Truncations for Model Order Reduction of Descriptor Systems," arXiv:1811.04630 [cs.NA].

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Y. Tanji	4. 巻 E101-C
2. 論文標題 Equivalent Circuit of Yee's Cells and its Application to Mixed Electromagnetic and Circuit Simulations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 IEICE Trans. on Electronics	6. 最初と最後の頁 703-710
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y. Tanji	4. 巻 9
2. 論文標題 Low-Rank Solutions of Riccati Equations for Positive Real Balanced Truncations of RLC Networks	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Nonlinear Theory and Its Applications	6. 最初と最後の頁 479-496
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 丹治裕一	4. 巻 J100-C
2. 論文標題 FDTD法における非線形素子の取り扱いに関するニュートン法の改良	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 電子情報通信学会論文誌C	6. 最初と最後の頁 384-387
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y. Tanji	4. 巻 E100-A
2. 論文標題 Bounded Real Balanced Truncation of RLC Networks with Reciprocity Consideration	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 IEICE Trans. on Fundamentals	6. 最初と最後の頁 2816-2823
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuich Tanji	4. 巻 E100-A
2. 論文標題 Efficient Balanced Truncation for RC and RLC Networks	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 IEICE Trans. on Fundamentals	6. 最初と最後の頁 266-274
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 丹治裕一
2. 発表標題 回路の受動性・双対性を保存したモデル低次元化手法
3. 学会等名 電子情報通信学会エレクトロニクスシミュレーション研究会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 丹治裕一
2. 発表標題 ADIを用いた代数リカッチ方程式の解法
3. 学会等名 電子情報通信学会非線形問題研究会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 丹治裕一
2. 発表標題 RLC回路の受動性・双対性を保存したモデル低次元化法
3. 学会等名 電子情報通信学会非線形問題研究会
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----