

令和元年6月12日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2018

課題番号：16K03731

研究課題名（和文）漸近論を用いたデリバティブの価格評価の新展開

研究課題名（英文）Pricing Contingent Claims with asymptotic Theory: New direction

研究代表者

室井 芳史（Muroi, Yoshifumi）

東北大学・経済学研究科・准教授

研究者番号：90448051

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,900,000円

研究成果の概要（和文）：本提案ではCEVモデルのような局所ボラティリティ・モデルにおいて、株式オプション価格を2項分岐木を用いて計算することを目標としていた。偏微分方程式の漸近展開法に習い二項分岐木上でテイラー展開を行ないオプション価格を求める予定であった。しかし、元の偏微分方程式アプローチすら低次の展開では十分な精度が得られないという懸念を持った。そこで、偏微分方程式アプローチにフーリエ解析と多項式計算を適用し高次漸近展開を行なう方法を考案し論文にまとめた。その結果、低次の展開では十分な計算精度を得られず、二項分岐木による近似は難しいことが判明した。一方、新しい高次漸近展開による価格計算手法を提案することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

オプション価格の計算で用いられるブラック・ショールズ・モデルではオプションのスマイル・カーブを説明できずより一般的なモデルが数多く提案されてきた。その中でも局所ボラティリティ・モデルのような非線形なモデルにおいてオプションの価格計算を行う方法を考察をした。二項分岐モデルによる計算は断念したものの、数値フーリエ解析を用いることでジャンプの項が入ったCEVモデルにも適用できるオプション価格計算法を提案することができた。また、FFTを有効に使うことでバミューダ型やアメリカ型オプションといったより広いクラスの金融商品の計算にも適用可能な手法を提案できた。

研究成果の概要（英文）：The aim of this research proposal was to construct a new asymptotic expansion method for pricing options using the binomial tree methods on the local volatility model, such as CEV model. Unfortunately, we could not derive the price accurately as long as we use a lower order asymptotic expansion to construct a binomial tree. In order to confirm this, we proposed a new computation method of option price; an asymptotic expansion formula for the option price in a CEV model using the asymptotic expansion technique and Fourier analysis. This approach enables us to derive the higher order terms using only algebraic computation. Furthermore, this method enables us to derive not only the price of European options, but also the price of options with an early exercise feature, such as Bermudan options and American options. I regret that the first proposal was not fully successful. On the other hand, we proposed an alternative method for pricing options in the local volatility model.

研究分野：数理ファイナンス

キーワード：局所ボラティリティモデル 高速フーリエ変換 バミューダ型オプション

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

近年になり、漸近論を用いた数理ファイナンスの論文が数多く出版されている。これらの研究により、例えば局所ボラティリティ・モデルや確率ボラティリティ・モデル、ジャンプ拡散モデルなどにおけるファイナンスの諸問題がシステマティックに解決されるようになってきた。それをさらに発展させ、さまざまなタイプの漸近論をより多くの手法に応用することで漸近論を用いた金融の諸問題の解決法に更なる深化を与える必要性を感じている。

2. 研究の目的

近年の数理ファイナンスの問題の漸近論の適用法は、金融の諸問題の近似による解決を目指したものがほとんどである。これらの研究では、例えば、金融商品の価格などを閉じた形の近似解を漸近論を用いて導出するなどの話題が数多く見られる。一方、数理ファイナンスの諸問題の解決にはさまざまな数値計算法が提案されており、漸近論とそれらの手法の組み合わせによりさらに多くの問題の解決ができるのではないかと考えられる。本研究では、実際に漸近論とどの手法を組み合わせると金融の諸問題が解決されるかを考えてみたいと思う。

3. 研究の方法

まず、考えられる手法は、数理ファイナンスで古くから利用されている2項分岐木が漸近論と組み合わせることができるかを考察した。当初、考えていたモデルにおいては近似精度が十分とは言えずこの方向の研究は断念せざるを得なかった。その一方で、数値フーリエ解析と漸近論を組み合わせるとオプション価格を計算する研究を実施した。特に、局所ボラティリティ・モデルの研究では、多項式の計算と組み合わせることで高次の漸近展開項の計算を簡便なアルゴリズムにより求めることができることを示した。

4. 研究成果

当初は漸近展開法を用いて局所ボラティリティ・モデルにおける2項分岐木を用いた新しいオプション価格評価方法について考察をする予定としていた。しかし、研究をすすめるうちに提案手法が低次の漸近論ではよい近似ができないのではないかと懸念を持つようになった。そこで、実際にそのような手法が適用できるかどうかを考察するために2項木ではない方法で高次漸近論による数値計算を実施してみたが、やはり、低次の近似では近似精度が悪く2項分岐木で価格計算を行うのは困難であろうと予想される計算結果を得た。その代わりとして高次漸近論による計算法については研究としてまとめることができた。その他、漸近論による確率ボラティリティ・モデルにおけるオプション価格評価に関する研究や2項木によるグリークスの計算法に関する研究など別の研究成果を得ることができた。

(1) Pricing of Guaranteed Annuity Options in a Stochastic Volatility and Interest Rate Environment

年金給付保証権付き商品は保険契約者が退職した時点で、退職まで運用した累積基金からまとまった支払いを受けるか、個定利率による年金を受け取るかを選択することができる商品である。この保険商品は、戦後しばらく経った1957年に販売が開始され、1980年代には英国で人気を博した商品であった。当時の英国は常に金利が10%を超えており、累積基金からの支払いを確定年金に契約を変更する部分をオプションとして切り離してみると常にファー・アウト・オブ・ザ・マネーの状態であった。そのため、確定年金に契約変更されることはなく、オプション部分の価値は省みられてこなかった。ところが1990年代に英国の金利が低下すると、年金を選択するという価値が増大した。その結果、1990年代初頭に世界最古の生命保険会社であるエクイタブル・ライフ社が保証付き年金の支払いの一部凍結の宣言を行い最終的にはエクイタブル・ライフ社は倒産に追い込まれた。このような事実より、保険数学において、年金給付保証権付き商品の価格評価モデルについて大きな興味が集まるようになった。保険商品は長期にわたり契約が続く商品であり、ボラティリティの変動の効果を無視することができない。そこで、本研究では確率ボラティリティ・モデルにおいて年金給付保証権付き商品の価格の計算をおこなってみることにした。まず、確率ボラティリティの効果まで考慮して年金給付保証権付き商品の価格の計算を行った例は過去に余り多くなくこれ自体が研究成果として意義を持っていると理解している。代表的な確率ボラティリティ・モデルであるHestonモデルの枠組みにおけるオプション価格計算において、通常用いられる特性関数を用いた価格計算法は残念ながらこの金融商品の価格計算には向いていないことから、漸近展開を用いて近似価格を導出することとした。その結果、Hestonモデルをふくむより広いモデルにおける年金給付保証権付き商品の価格導出に成功した。

年金給付保証権付き商品は満期時点での基金の運用額 S を受け取るか S を保証率 g で割った S/g を毎年受け取る年金にするかを選択できるものとする。そのとき、例えば、年金給付保証権付き商品を保証率 g の関数と見ると、図1のような概形を持つことなどが計算できる。この図から見て分かる通り、保証率の大きさによりオプション部分の価値が大きく変わることなども分かる。

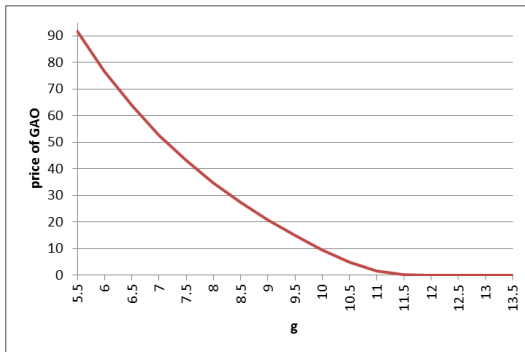


図 1：保証率による年金給付保証権付き商品価格

(2) Pricing of Options in the Singular Perturbed Stochastic Volatility Model

近年、特異摂動展開法を用いた確率ボラティリティ・モデルにおけるオプション価格付け法が注目を集めるようになった。この方法は、証券価格に対して早く動くボラティリティがオプション価格に及ぼす効果を計算する方法である。偏微分方程式を用いて直接オプション価格を計算することが、過去の多くの研究で行われてきた。それに対して、今回は同じ手法で特性関数を計算し、FFT法を用いてオプション価格の計算をするというアイデアにより研究を行った。このアイデアの優れている点は、通常のオプションのペイ・オフ関数は可微分ではないので、数学的な意味での近似の精度評価を行うときに困難がともなう。一方、特性関数は満期時点では滑らかな関数(指数関数)なので精度評価が簡単に行える点が挙げられる。これにより、価格近似式の近似精度の議論が格段に簡単になったことは特筆すべき点である。また、特性関数を用いたことにより、ジャンプの項が入った場合でもオプションの価格が簡単に評価できるようになったことや、パミュューダー型オプションのような早期行使権の付いた金融商品についてもFFT法を用いることで簡単に価格評価を行えることができるようになった。

(3) Computation of Greeks in Jump-Diffusion Models Using Discrete Malliavin Calculus, Mathematics and Computers in Simulation

近年、マリアバン解析は数理ファイナンスにおいても欠くことができない道具となった。マリアバン解析は、例えば、オプションの感応度の計算などで多用されている。マリアバン解析を用いたオプション感応度に関する過去の研究では、連続時間モデルにおいてマリアバン解析を利用して感応度の期待値表現を求め、それをモンテ・カルロ法で計算するというものがほとんどであった。本研究では、マリアバン解析の離散版を提案することにより、2項木と呼ばれる数値計算法を用いて感応度を計算することに成功した。特に、本研究では、原商品価格過程にジャンプの効果が入った場合に離散マリアバン解析を適用し感応度を計算してみた。マリアバン解析は、本来、数学的に難解な内容を含む手法であり、実務家や学生・研究者にとって理解が難しい手法であることが知られてきた。ところが、マリアバン解析の離散版を導入することによって、実務家や学生・研究者にとってより扱いやすいものとなった。また、モンテ・カルロ法が標準的な計算法であった感応度の計算に、2項木の利用という新しい可能性を持ち込むことにも成功した。例えば、マートン型ジャンプ拡散過程において初期資産価格に対するオプション価格の感応度(デルタ)を二項ツリーで計算しようとする、差分法を用いると下の図のように激しく振動するが、我々の提案手法を用いると真値の周りを小さく振動するような計算結果となり、デルタの値を誤差が小さく計算することができることが分かる。

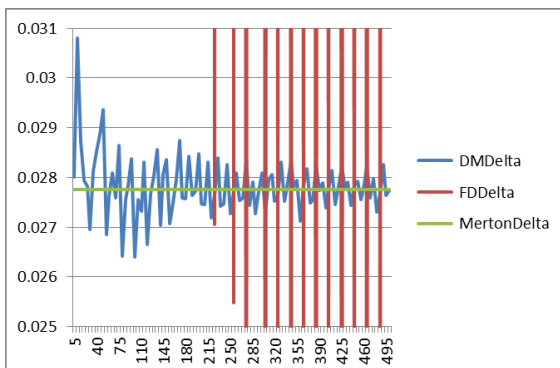


図 2. 2項分岐木を用いて計算したマートン型ジャンプ拡散モデルにおけるデジタル・オプションのデルタの値

(4) Computation of Greeks Using Binomial Tree

離散マリアバン解析を1期間モデルに適用することで、代表的な早期行使権を有する金融商品であるアメリカ型オプションの感応度も計算を可能とした研究である。この手法を繰り返し利用することで、多期間モデルにおけるアメリカン・オプションの感応度の計算も可能とした。アメリカ型オプションのグリークスの計算法は余り多くの先行研究がなく、本研究は、極めて簡単にかつ安定的に価格感応度の新しい計算法を提案したという意味で、学術のみならず実務的な意味でも重要な成果であるものと考えられる。

(5) CCF Approach for Asymptotic Option Pricing under the CEV Diffusion

CEVモデルと呼ばれる局所ボラティリティ・モデルにおいて漸近展開法を用いたオプション価格の計算を行う研究を行った。漸近展開法である程度の近似精度を確保しようとした場合に、高次漸近展開が必要となることがある。その際は、高次漸近展開を用いて原資産過程の価格分布の特性関数の高次オーダーの算出が必要となるが、この部分を多項式による代数計算により算出することを可能とした。いったん、特性関数が近似したらFFTを用いてヨーロッパアン・オプションの価格が計算可能となる。この方法であれば、CEVモデルのみならず、ジャンプの付いたCEVモデルにおけるオプション価格も計算が可能である。なお、本研究の拡張として、バミュダ型やアメリカ型など早期行使権のある金融商品の価格についてもオプション価格の導出を行っている。本研究の結果は、現在、英文誌に投稿中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 4 件)

Y. Muroi and S. Suda, Computation of Greeks Using Binomial Tree, Journal of Mathematical Finance, 査読あり, 2017.

Y. Muroi and S. Suda, Computation of Greeks in Jump-Diffusion Models Using Discrete Malliavin Calculus, Mathematics and Computers in Simulation, 査読あり, 2017, 140, 69-93.

T. Liu and Y. Muroi, Pricing of Options in the Singular Perturbed Stochastic Volatility Model, Journal of Computational and Applied Mathematics, 査読あり, 2017, 320, p138-144.

Y. Muroi and K. Kizaki, Pricing of Guaranteed Annuity Options in a Stochastic Volatility and Interest Rate Environment, Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance, 査読あり, 2016, 10, p133-153.

〔学会発表〕(計 2 件)

Y. Muroi, CCF Approach for Asymptotic Option Pricing under CEV diffusion, 査読なし, 2017, The Quantitative Methods in Finance 2017 Conference

Y. Muroi, Pricing of Options in the Singular Perturbed Stochastic Volatility Model, 査読なし, 2016, The Quantitative Methods in Finance 2016 Conference

〔図書〕(計 1 件)

保険と金融の数理(クロスセクショナル統計シリーズ,6) 共立出版 2017 室井芳史 208 p

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年:

国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
<http://www.econ.tohoku.ac.jp/econ/member/ymuroi.html>

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：
ローマ字氏名：
所属研究機関名：
部局名：
職名：
研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。