

令和 2 年 6 月 28 日現在

機関番号：14503

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K04687

研究課題名(和文) 数学学習における「学習者に数学的概念の例をつくらせる」という教授方略に関する研究

研究課題名(英文) A Study on Learners Generating Examples Strategy in Mathematics Learning

研究代表者

川内 充延 (Kawauchi, Mitsunobu)

兵庫教育大学・学校教育研究科・准教授

研究者番号：50737624

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、数学学習における「学習者に数学的概念の例をつくらせる」という教授方略を新たな視点で構築することにあった。その成果としては、「学習者がつくった例には統合化可能な多様性があること」、「例の質を評価する際には、その例が概念形成のためなのか、または概念獲得のためなのかを判断することが前提になること」、「学習者がもつ例のコレクション(example space)をいかに発展させるかが、学習指導上の留意点の1つになること」を見出したことが挙げられる。また、これらの成果とともに、平方根の概念形成を図るための教材を開発したことも挙げられる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の成果には、数学教育学の研究領域の1つとなる、LGEs (Learners Generating Examples) 教授方略に対して、新たな視点を与えたことに学術的意義がある。この教授方略に関しては、イギリス、カナダ、イスラエルなどの研究者が今なお様々な視点で研究を積み重ねており、理論と実践の融合を図りながら教育現場での活用が十分に期待される。また、平成29年告示の小学校及び中学校学習指導要領では、算数科及び数学科の目標において、「数量や図形などの性質を見いだし統合的・発展的に考察する力」の育成が掲げられている。この点に対しても本研究の成果は示唆を与えている。

研究成果の概要(英文)：The aim of this study was to construct teaching strategies from a new perspective on "learners generate examples of mathematical concepts" in mathematics learning. As results, I found that "the learners-generated examples have varieties that can be integrated." "When evaluating the quality of an example, it is a prerequisite to determine whether the example is 'example for' or 'example of'." "How to develop the learner's example space is one of the important points in learning instruction." In addition to these, I have developed teaching materials for the concept formation of the square root.

研究分野：数学教育学

キーワード：学習者がつくる例 example space 数学的概念の形成 平方根 格子平面

## 様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 2005年6月、オックスフォード(イギリス)にて、数学教育における「例示(exemplification)」に関する小会議が開かれた。この小会議には、イギリス、イスラエル、チェコ共和国、アメリカ、カナダの5カ国から計15名の研究者が参加し、7つのセッションに分かれて議論が交わされた。その翌年、プラハ(チェコ共和国)にて、数学教育における心理学に関する国際会議(PME)が行われ、この時点までの数学教育における「例」に関する研究が、オックスフォードでの小会議をもとにして総括される形となった。その報告書の冒頭には、「例示(exemplification)」に関する論点は数学のあらゆる種類の約束事に関連がある」(Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson & Zaslavsky, 2006)と述べられている。「例示(exemplification)」とは、数学の教授・学習における「例」の使用全般を指す概念であり、この国際会議をもって研究分野として確立された。その後、イタリアの研究者グループにも重要な分野であると認められ、今なお世界的な研究の広がりを見せている。先の報告書では、歴史上、理論上、指導者、学習者、研究者という5つの立場から、数学教育における「例」が考察されている。特に注目すべき点は、「学習者は例をつくることで、起こりうる変動の局面とそれに対応する変化の許容範囲に気付く」「このことは今後の研究課題の1つでもある」という記述にある(ただし、本研究では学習者がつくる例を数学的概念に関するものと限定する)。本研究はこの報告書から得られた示唆に基づいている。それらをまとめると次のようになる。

- ・「学習者に数学的概念の例をつくらせる」という教授方略には、学習者の数学学習を活性化させる上で新たなアイデアが潜んでいる。
- ・学習者がつくる数学的概念の例について、その考察が未だ途上である。

(2) 近年、数学教育における「例示(exemplification)」については、課題設定に関する考察(Watson & Shipman, 2008)、例の質に関する考察(Watson & Chick, 2011)、例のタイプ、例の使用、例を用いた方略に関する考察(Lockwood, Ellis, Dogan, Williams, Knuth, 2012)、証明プロセスへの活用に関する考察(Sandefur, Mason, Stylianides & Watson, 2013)、例を用いた思考の自発的な面や誘発的な面に関する考察(Zaslavsky, 2014)など、海外の研究者からいくつとなく論文が提出されているが、国内では本研究に関連する論文をあまり見かけない。本研究はこのような学術的背景のもと、日本の数学教育へ国際的な視点を導入することになる。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、数学学習における「学習者に数学的概念の例をつくらせる」という教授方略を新たな視点で構築することである。本研究の具体的な目標としては次の3つとなる。

- ・学習者が数学的概念の例をつくる場面に焦点を当て、実践的内容を分析すること
- ・学習者がつくる数学的概念の例の質に関するルーブリック(評価指標)を作成すること
- ・学習者がつくる数学的概念の例を活用する教材を開発すること

### 3. 研究の方法

数学学習における「学習者に数学的概念の例をつくらせる」という教授方略を新たな視点で構築するために、本研究を進めていく方法としては次の3つとなる。

- ・先行研究における授業場面に関する記述、研究協力者が提供する資料を分析する。また、研究協力者が提供する授業を考察する。
- ・研究協力者が提供する授業、学習者が記入したワークシート、指導者や学習者へのインタビューを分析する。
- ・研究協力者ととも教材(学習指導案を含む)を作成し、授業実践を行い検証する。

### 4. 研究成果

(1) 1つ目の研究成果としては、「学習者に数学的概念の例をつくらせる」という課題への取り組みが、小学校から高等学校の学習内容に照らし合わせるように想定でき、さらにこの教授方略によって、学校数学の体系に基づく形で数学的知識の統合化可能な多様性を顕在化させたことである。このときの課題は「和と積が等しくなる2つの数の例をつくりなさい」であった。なお、この課題はButts(1982)に掲載された50のサンプルのうちの1つである。次にその概要を示しておく。

#### ① 方法に着目した学習活動

小学校6年では、ともなって変わる2つの数量の関係に注目し、そこからパターンを見つけ出し、文字を使って表すという学習がある。学習者には単に例を求めさせるだけでなく、複数の例から帰納的な推論を促したい。「和と積が等しくなる2つの数の例をつくりなさい」という課題に対して、学習者はまず(2,2)を挙げるだろう。そして、(0,0)や(3,1.5)も学習者の試行錯誤によって出てこないだろうか。3つの例が挙げれば、学習者には4つ目、5つ目となる例を求めさせたい。ただ、ここでは学習者にヒントを出さなければならぬ状況が十分に考えられる。そのため、(2,2)と(3,1.5)を右のように書き直し、学習者に推測させたい。一方の数がもう一方の数の分子になり、一方の数から1小さい数がもう一方の数の分母になっていることが分かれば、下のよう

$$\left(2, \frac{2}{1}\right)$$

$$\left(3, \frac{3}{2}\right)$$

に例が学習者から挙げられると思われる。これら2数の例を見ると、一方の数が1

のとき、もう一方の数がない。パターンを文字で表した式から、 $a = 1$ のとき分母が0になるので、その理由を確認することができるが、ここに深入りする必要はない。中学校や高等学校の数学学習の中でその理由がはっきりとしてくることなので、今後の学習への興味付けや動機付けとしたい。

中学校1年では、1元1次方程式について学習する。この単元の終わり頃に、「和と積が等しくなる2つの数の例をつくりなさい」という課題を設定する。学習者には2つの数のうち一方の数を学習者自身で適当に定め、もう一方の数を未知数  $x$  として1元1次方程式を立てることが期待される。たとえば、一方の数を8と定め、もう一方の数を  $x$  として1元1次方程式を立てて、それを解くと右のようになる。学習者は小学校6年での試行錯誤による方法と比べ、方程式を利用するよさを実感するであろう。

高等学校の数学IIでは、2次方程式の解と係数の関係について学習する。この学習の中で、「和と積が等しくなる2つの数の例をつくりなさい」という課題を設定する。求める2つの数を2次方程式の解とし、その和または積を  $m$  とすると、本課題に対して右のような取り組みが考えられる。この方法は、2次方程式の解と係数の関係を利用し、等しいとする和または積を学習者自身が適当に定めている。 $m$  の値によっては、二重根号が残ったり、ルート内が負の数になったりする場合があるが、これらのことを含めて、学習者はいろいろな計算に当たることが大切であろう。

### ② 結果に着目した学習活動

小学校6年であれば、一方の数がもう一方の数の分子になり、一方の数から1小さい数がもう一方の数の分母になることから例をつくり出すことを前述した。そのときは一方の数が整数であったが、一方の数を分数にして、もう一方の数を求めてみると、和と積が等しくなる2つの数についての理解が深まるはずである。また、中学校や高等学校であれば、一方の数を負の数や無理数として、もう一方の数を求めることが考えられる。

### ③ 統合化可能な多様性

先の想定例の他にも、和と積が等しくなる2つの例をつくる方法はあるだろう。そのような方法も含めて、和と積が等しくなる2つの数の例をつくる方法として1つにまとめられる。片桐(2004)の統合的な考え方に照らし合わせると、このことは〔統合I型(高次の統合)〕に相当する。ただし、この教授方略では幾つかの事柄に内在する共通な本質が課題として提示される。つまり、学習活動の最初から「高次の統合」の内容が示されている。また、〔統合II型(包括的統合)〕や〔統合III型(拡張的な考え方)〕にも相当する想定例を示した。

(2) 2つ目の研究成果としては、学習者がつくる数学的概念の例の質を評価するために、その枠組みを提案したことである。この枠組みは2段階構成となっている。まず、学習者がつくる数学的概念の例を「概念獲得のための例(example of)」と「概念形成のための例(example for)」のどちらになるかを判断する。次に、個々の例に対しては「接近性(accessibility)」「正しさ(correctness)」「一般性(generality)」を観点とし、複数の例の集まりとなる example space に対しては「豊かさ(richness)」を観点として評価する。これを実際に運用するには課題に応じた評価規準及び評価基準の設定が不可欠であり、評価の困難性が生じにくい課題開発も重要であることを指摘した。

(3) 3つ目の研究成果としては、「学習者に数学的概念の例をつくらせる」という教授方略を利用し、平方根の概念形成を図るための教材を3つ開発したことである。次にその概要を示しておく。

#### ① 格子平面上に現れる平方根

正方形の格子平面(Square Dotty Grid)上にいろいろな図形をかくことは、小学校低学年から取り組まれている。格子点を結んでできる正方形で、最も小さいものの1辺の長さを1とすると、その対角線の長さは $\sqrt{2}$ となる。よって、正方形の格子平面上で、正方形の1辺  $m$  のながさと対角線  $m'$  のながさより  $m' = \sqrt{2}(m)$  として、写像としての $\sqrt{2}$ を導入することを図1のように提案した。また、 $\sqrt{5}$  や $\sqrt{10}$  なども同様に表現できることを示した。さらに、正三角形の格子平面(Isometric Grid)上では、 $\sqrt{3}$  や $\sqrt{7}$  などが表現できることを示した。

$(0, 0)$	$(4, \frac{4}{3})$	$(7, \frac{7}{6})$
$(2, \frac{2}{1})$	$(5, \frac{5}{4})$	$\vdots$
$(3, \frac{3}{2})$	$(6, \frac{6}{5})$	$(a, \frac{a}{a-1})$

$$\begin{aligned} 8 + x &= 8x \\ x - 8x &= -8 \\ -7x &= -8 \\ x &= \frac{8}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m = 10 \text{ のとき,} \\ x &= \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \times 10}}{2} \\ x &= 5 \pm \sqrt{15} \\ &\downarrow \\ (5 + \sqrt{15}, 5 - \sqrt{15}) \end{aligned}$$

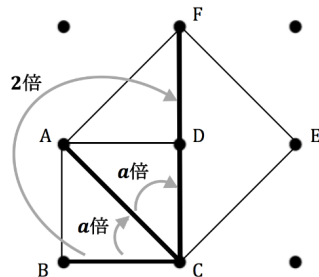


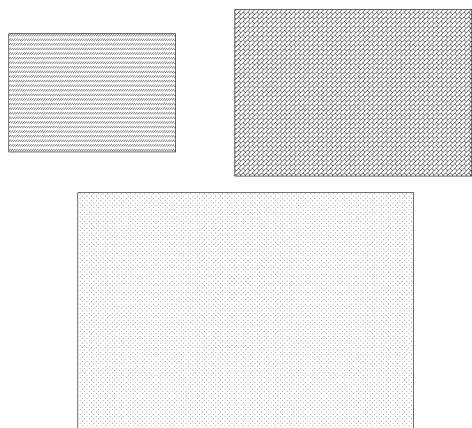
図1  $\sqrt{2}$ の連続的な現れ方

② 紙を折ることにより現れる平方根

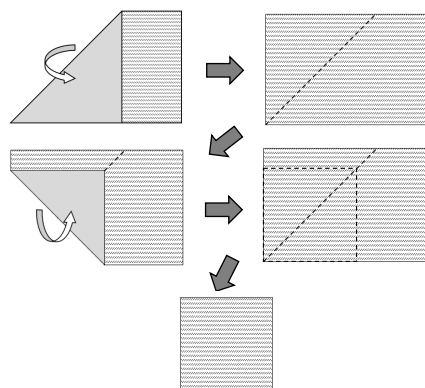
本教材は、長方形の紙を折って正方形をつくることに始まる。次に、その正方形の対角線の長さを1辺とする、新たな正方形をつくる。これをもう1度繰り返す、併せて3つの正方形をつくる。学習者の作業は図2のようになる。

この作業は、学習者に3つの正方形をつくらせることによって、正方形の1辺の長さの変化を、倍率をもって捉えさせることを意図している。正方形の1辺が徐々に伸びていく様子から、学習者は正方形の1辺の長さの変化を差ではなく、倍率でもって考察する方が自然であろうと考えた。また、3つの正方形の1辺の長さの変化は、1番目の正方形の1辺の長さとの対角線の長さの関係であり、2番目の正方形の1辺の長さとの対角線の長さの関係でもある。そのため、学習者に同じ倍率ではないかという見通しを持たせやすいとも考えた。

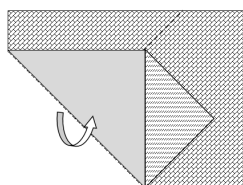
《作業1》3枚の色紙（長方形）を受け取る。



《作業2》最も小さな色紙で90°の角（図では左下の角）の二等分線を折る。この線を利用して、適当なところで折り返し、1番目の正方形をつくり、切り取る。



《作業3》同じ手順で、1番目の正方形の対角線を1辺とする、2番目の正方形をつくり、切り取る。



《作業4》同じ手順で、2番目の正方形の対角線を1辺とする、3番目の正方形をつくり、切り取る。

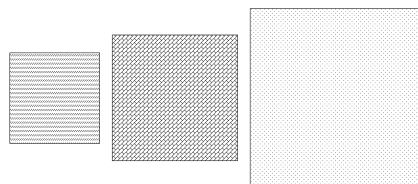


図2 正方形を3つ作る場合

③ 長方形の面積に見る平方根

本教材は、長方形の面積の概念形成を図ることを開発の目的としている。この目的を達成するために、The Out-In Complementary Principleの利用を熟考した。The Out-In Complementary Principleとは図3～図5のような等積変形に関する原理である。本教材では図3～図7をこの原理の導入段階での example space と想定した。

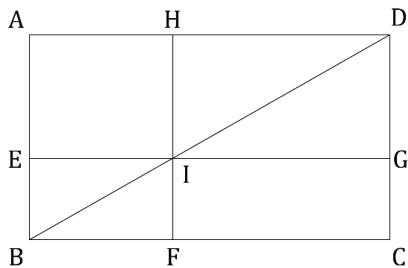


図3 長方形 AEIH = 長方形 IFCG

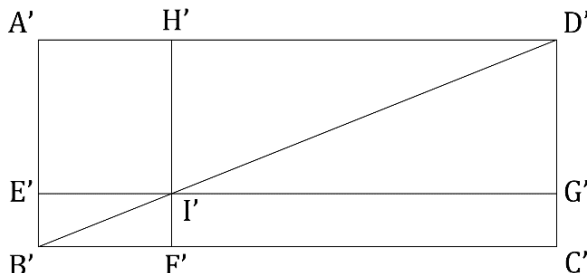


図4 長方形 A'E'I'H' = 長方形 I'F'G'C'

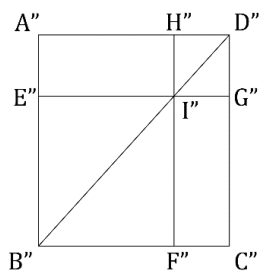


図5 長方形 A''E''I''H'' = 長方形 I''F''C''G''

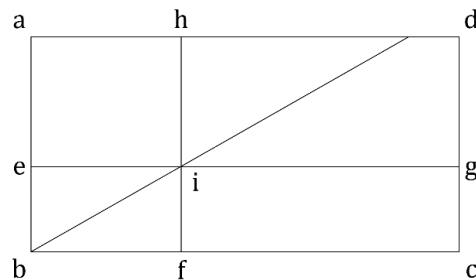


図6 長方形 aeih < 長方形 ifcg

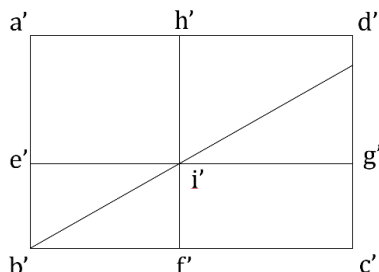


図7 長方形 a'e'i'h' > 長方形 i'f'c'g'

以上のことを踏まえ、次の4つの学習段階を提案した。

- 第1段階：縦の長さや横の長さが無理数で表される長方形の面積が、単位正方形のいくつ分では説明がつかないことに気づく段階
- 第2段階：包含関係のない2つの長方形において、その広さを比べることで The Out-In Complementary Principle を導く段階
- 第3段階：任意単位に基づく単位線分をもって、2つの長方形の広さを比べるために、The Out-In Complementary Principle を利用する段階
- 第4段階：長方形の面積について、単位正方形のいくつ分という定義から、単位線分に対する比の値（倍率）という定義へと乗り換える段階

<引用・参考文献>

- ① Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in Mathematics Education. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, and N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.1, pp.126-154. Prague, Czech Republic: PME.
- ② Watson, A., & Shipman, S. (2008). Using learner generated examples to introduce new concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 69, pp.97-109.
- ③ Watson, A., & Chick, H. (2011). Qualities of examples in learning and teaching. *ZDM-Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik*, 43(2), pp.283-294.
- ④ Lockwood, E., Ellis, A.B., Dogan, M.F., Williams, C., & Knuth, E. (2012). A framework for mathematicians' example-related activity when exploring and proving mathematical conjectures. In L.R. Van Zoest, J.J. Lo, & J.L. Kratky (Eds.), *Proceedings of the 34<sup>th</sup> Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp.151-158. Kalamazoo, MI: Western Michigan University.
- ⑤ Sandefur, J., Mason, J., Stylianides, G. J., & Watson, A. (2013). Generating and using examples in the proving process. *Educational Studies in Mathematics*, 83, pp. 323-340.
- ⑥ Zaslavsky, O. (2014). Thinking with and through examples. In Liljedahl, P., Nicol, C., Oesterle, S., & Allan, D. (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, Vol. 1, pp.21-34. Vancouver, Canada: PME.
- ⑦ Butts, T. (1982). Learning by example. *Mathematics Teacher*, 75(2), pp.109-113.
- ⑧ 片桐重男 (2004). 『数学的な考え方の具体化と指導 (新版 数学的な考え方とその指導 第1巻)』. 明治図書出版.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 川内充延, 渡邊公夫	4. 巻 24
2. 論文標題 平方根の導入のための素地指導に関する一考察 - 無理数の動的なイメージの構築を目指して -	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 全国数学教育学会 数学教育学研究	6. 最初と最後の頁 61, 69
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 川内充延, 渡邊公夫	4. 巻 29
2. 論文標題 平方根の導入教材に関する研究	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 日本教材学会 教材学研究	6. 最初と最後の頁 91, 102
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 川内充延	4. 巻 23
2. 論文標題 数学学習における「例づくり」に関する研究 - 例づくりの統合化可能な多様性 -	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 全国数学教育学会誌 数学教育学研究	6. 最初と最後の頁 45, 53
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 川内充延	4. 巻 30
2. 論文標題 数学学習におけるExample-Generationに関する研究 ~学習者がつくる数学的概念の例の質~	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 近畿数学教育学会会誌	6. 最初と最後の頁 18, 25
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 川内充延, 渡邊公夫
2. 発表標題 平方根の導入のための素地指導に関する一考察 - 数の動的なイメージの構築を目指して -
3. 学会等名 全国数学教育学会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 川内充延
2. 発表標題 数学学習における「例づくり」に関する研究 - 例づくりの統合化可能な多様性 -
3. 学会等名 全国数学教育学会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 川内充延
2. 発表標題 数学学習における「例づくり」に関する研究 - 学習者がつくる数学的概念の例の質 -
3. 学会等名 近畿数学教育学会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 川内充延, 渡邊公夫
2. 発表標題 The Out-In Complementary Principleの教材化 - 数の拡張に応じた長方形の面積概念の形成 -
3. 学会等名 全国数学教育学会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 川内充延, 渡邊公夫
2. 発表標題 根号を用いて表される量の概念形成を促す教材開発
3. 学会等名 全国数学教育学会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	渡邊 公夫  (Watanabe Kimio)		