

令和元年6月13日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05035

研究課題名(和文) 近似Syzygyによる代数曲面の融合計算の研究

研究課題名(英文) Calculation of blending surfaces with approximate Syzygies

研究代表者

照井 章 (Terui, Akira)

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：80323260

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：代数曲面の融合曲面の計算の基本となる1変数多項式の近似最大公約子(GCD)アルゴリズムについて、これまでの研究代表者が開発したアルゴリズムに用いられていたSylvesterの終結式行列に代え、新たにBezoutの終結式に基づく近似GCD計算アルゴリズムを開発した。近似GCD計算等のアルゴリズムで用いる行列計算の効率的な実装に関連し、拡張Horner法と最小多項式候補や最小消去多項式候補を用いた逆行行列計算アルゴリズム、および、行列Horner法の並列化による固有ベクトル計算のアルゴリズムの実装を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

計算機代数は、多項式で記述された問題を解く際に適した計算の理論および手法であるが、与えられた多項式の係数が誤差を含んでいるような場合、従来の計算機代数の手法では有効な計算ができない場合がある。数式・数値融合計算は、このような問題に対しても有効な計算を行うためのアプローチの一つである。多項式の最大公約式(GCD)計算は、計算機代数の中でも基本的かつ重要なものであり、数式・数値融合計算の枠組みの中での近似GCD計算のアルゴリズムの開発は、計算機代数の有効性を高める取り組みの一つとして重要な意義がある。

研究成果の概要(英文)：In calculating an approximate Greatest Common Divisor (GCD) of univariate polynomials which is a basis of the calculation of blending surfaces of algebraic surfaces, we have developed a new algorithm based on the Bezout resultant. For efficient algorithm and implementation of matrix computation used in algorithms such as approximate GCD computation, we have developed new algorithms for computing the matrix inverse using the extended Horner's rule and pseudo minimal polynomials or pseudo annihilating polynomials. We also have made the efficient implementation of an algorithm for computing eigenvectors using parallel computation of the Horner's rule for matrix polynomials.

研究分野：計算機代数

キーワード：数式・数値融合計算 最大公約子 計算機代数 Syzygy

1. 研究開始当初の背景

幾何学的モデリングにおける、代数曲面の融合（貼り合わせ）の問題は、代数方程式の根として表される代数曲面を滑らかに貼り合わせる問題で、工業製品のデザインや設計、コンピュータグラフィクスにおけるモデリングやシミュレーション、アニメーションなど、さまざまな応用がある。幾何学的モデリングにおいては、対象物に課される物理的、構造的その他の制約から、その形状を代数曲面として導くことがしばしば行われるので、代数曲面の利用は幾何学的モデリングにおいて重要な要素の一つである。

代数曲面の融合を用いた幾何学的モデリングでは、まず、表現する対象物をいくつかの（細かい）領域に分割し、次に、それぞれの領域における「部品」ごとに曲面を構成し、最後に、それらを滑らかに貼り合わせて全体の曲面を構成することにより、より単純な代数曲面の構成を効率的に実現する。

計算機代数を用いた代数曲面の融合については、Syzygy（シチジー）やグレブナー基底を用いる方法が提案されていたが、従来の計算機代数の手法では、入力される数値や式の係数が厳密な数値（整数や有理数）で与えられ、それらに対する演算も厳密に行われることを前提としている。一方で、代数曲面を定義する代数方程式は、物理的、構造的その他の測定値などから、係数が浮動小数で与えられることもしばしばある。

係数が浮動小数で与えられる問題に対し、従来の計算機代数の枠組みによるアルゴリズムを適用させようとする、与えられた係数も誤差に加え、代数計算の際に生ずる係数同士の演算の誤差により、代数曲面の正確かつ効率的な貼り合わせも一般に困難になる。このことは、より広範囲の代数曲面の融合問題を解く上で、大きな制約の一つになっていた。

2. 研究の目的

本研究では、当初の背景を踏まえ、以下のことを研究目的に設定した。

- (1) 多変数多項式の近似 Syzygy の概念の定式化を行う。
- (2) 多変数多項式の近似 Syzygy を実用的な精度で効率的かつ安定的に計算するアルゴリズムの開発を行う。
- (3) 近似 Syzygy を用いて、浮動小数係数多項式で与えられる代数曲面の融合計算を安定的、効率的に行うアルゴリズムの開発を行う。

3. 研究の方法

- (1) Syzygy の近似計算の基礎となる近似最大公約子(GCD)計算アルゴリズムについて、これまでの研究代表者が開発したアルゴリズムに用いられていた Sylvester の終結式行列とは異なる行列を用いることによる新たなアルゴリズムの開発を行った。
- (2) 近似 GCD 計算等のアルゴリズムで用いる行列計算の効率的な実装に関連して、行列多項式や逆行列計算等の線形計算の効率的なアルゴリズムの開発や実装を行った。

4. 研究成果

- (1) Syzygy の近似計算の基礎となる近似 GCD 計算アルゴリズムについて、新たな終結式行列を用いたアルゴリズムとして、Bezout の終結式に基づく近似 GCD 計算アルゴリズムを開発した。Bezout の終結式は、Sylvester の終結式と比較して、同じ入力多項式に対する行列の大きさがより小さく、計算効率がより高まることが期待された。実験結

果では、Sylvester の終結式を用いた従来のアルゴリズムと比較して、本研究で開発したアルゴリズムの計算効率の改善は部分的なものにとどまったが、先行研究で Bezout の終結式を用いた近似 GCD アルゴリズムと比較した結果では、計算効率の改善が見られた。近似 GCD の計算精度では、本研究で開発したアルゴリズムは、Sylvester の終結式を用いた従来のアルゴリズムと同等の精度で近似 GCD を計算することを示した。

- (2) 線形計算アルゴリズムの効率化では、拡張 Horner 法と最小多項式候補や最小消去多項式候補を用いた逆行列計算アルゴリズム、および、行列 Horner 法の並列化による固有ベクトル計算のアルゴリズムの実装を行った。逆行列計算アルゴリズムでは、行列多項式に拡張 Horner 法を用いることにより、ガウスの消去法を行うことなく、連立 1 次方程式の解の特定の成分を効率的に計算可能であることを示した。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 2 件)

- (1) 池泊明, 照井章 . Bezout の終結式行列を用いた GPGCD 法による 1 変数多項式の近似 GCD の計算 . 数理解析研究所講究録 **2104** “Computer Algebra–Theory and its Applications”, 8–13, 京都大学数理解析研究所, 2019 年 2 月. 査読無 .
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2104-02.pdf>
- (2) 田島慎一, 小原功任, 照井章 . 行列の最小多項式候補と拡張 Horner 法を用いた逆行列計算について II. 数理解析研究所講究録 **2019** “数式処理の新たな発展—その最新研究と基礎理論の再構成—”, 28–38, 京都大学数理解析研究所, 2017 年 4 月. 査読無 .
<https://hdl.handle.net/2433/231722>

〔学会発表〕(計 5 件)

- (1) 田島慎一, 小原功任, 照井章 . 最小消去多項式候補を用いた逆行列の計算 . RIMS 共同研究 (公開型) “Computer Algebra - Theory and its Applications”, 京都大学数理解析研究所, 2018 年 12 月 17 日 .
- (2) 池泊明, 照井章 . Bezout の終結式行列を用いた GPGCD 法による 1 変数多項式の近似 GCD の計算 . RIMS 共同研究 (公開型) “Computer Algebra - Theory and its Applications”, 京都大学数理解析研究所, 2017 年 12 月 20 日 .
- (3) 田島慎一, 小原功任, 照井章 . 行列 Horner 法の並列化による行列の固有ベクトル計算の効率化について . 日本数学会 2017 年度年会 代数学分科会, 首都大学東京, 2017 年 3 月 27 日 .
- (4) 田島慎一, 小原功任, 照井章 . 行列の最小多項式候補と拡張 Horner 法を用いた逆行列計算について . 日本数学会 2017 年度年会 代数学分科会, 首都大学東京, 2017 年 3 月 27 日 .
- (5) 田島慎一, 小原功任, 照井章 . 行列の最小多項式候補と拡張 Horner 法を用いた逆行列計算について II. RIMS 共同研究 “数式処理の新たな発展”, 京都大学数理解析研究所, 2016 年 9 月 7 日 .

〔図書〕(計 1 件)

- (1) 長坂耕作, 岩根秀直 (編著), 北本卓也, 讃岐勝, 照井章, 鍋島克輔 (著). 計算機代数の基礎理論. 共立出版, 2019, 248p.

6. 研究組織

(1) 研究分担者 なし

(2) 研究協力者

研究協力者氏名: 田島 慎一
ローマ字氏名: (TAJIMA Shinichi)

研究協力者氏名: 小原 功任
ローマ字氏名: (OHARA Katsuyoshi)

研究協力者氏名: 池 泊明
ローマ字氏名: (CHI Boming)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。