様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２年　６月　５日現在

機関番号：１０１０３
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2019
課題番号：１６Ｋ０５０５２

研究課題名（和文）一般化されたバーンサイド環の構造とその応用の研究

研究課題名（英文）Research on the structure of generalized Burnside rings and its application

研究代表者
竹ケ原　裕元（Takegahara, Yugen）

室蘭工業大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：１０２１１３５１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：有限群のバーンサイド環の構造に関して、その単数群に関する幾つかの結果を得た。また、バーンサイド環の一般化に関して、これまで知られている例を、一括して構成し、知られている性質を統一的に示した。その構成により、乗法的誘導写像や単数群の研究を統一的に進めることが可能になった。特に、乗法的誘導写像に関しては、バーンサイド環の間のテンソル誘導写像を一般化するものが存在するための十分条件を与えることに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
有限群のバーンサイド環とその一般化の研究は過去50年に渡って続けられている。特に、今世紀になってからは、多くの研究が発表されてきた。そこで、個別に進められてきた、様々なバーンサイド環の研究を統一的に行い、その上で、さらにバーンサイド環の一般化の例を与えることで、有限群の研究に応用することができないかという問いが生まれてきた。本研究はその問題に取り組む端緒を開いた。得られた諸結果は、今後、さらに取り組むべき問題を与えている。

研究成果の概要（英文）：Regarding the structure of the Burnside ring of a finite group, we obtained some results about the unit group. In addition, regarding the generalization of the Burnside ring, we have collectively constructed the examples that have been known so far and unifiedly showed the known properties. The construction made it possible to carry out research on multiplicative induction maps and unit groups in a unified manner. In particular, with regard to the multiplicative induction map, we succeeded in giving sufficient conditions for the existence of a generalization of tensor induction maps between Burnside rings.

研究分野：代数学

キーワード：バーンサイド環　斜バーンサイド環　単項バーサイド環　単数群　テンソル誘導写像　乗法的誘導写像

１．研究開始当初の背景

有限群 G のバーンサイド環 $\Omega(G)$ の一般化として, G が作用するモノイド S に関して定義される斜バーンサイド環 $X\Omega(G,S)$, G の部分群から有限アーベル群 A への 1 コサイクルに関して定義されるモノミアル・バーンサイド環 $\Omega(G,A)$, さらにこれらを含む制限関手からの $+$ 構成と呼ばれる一般化されたバーンサイド環 $A_+(G)$ 等が知られていた. バーンサイド環やその一般化について, その環構造は個別に得られた結果としていくつか知られていた. 研究課題として, 単数群, 原子べき等元, 乗法的誘導写像等があるが, モノミアル・バーンサイド環 $\Omega(G,A)$ に関しての研究はかなり進展していた. 元来, バーンサイド環 $\Omega(G)$ の単数群に関する研究を進める余地は十分にある. 近年, n 次対称群 S_n に対するバーンサイド環 $\Omega(S_n)$ の部分環としてヤング部分群について定義される環 $\Omega(S_n,\mathcal{Y})$ の単数群が明らかになっていた.

２．研究の目的

(1) 第 1 の目的は, バーンサイド環 $\Omega(G)$ の単数群に関する研究を進展させ, 特に B_n 型のコクセター群に関して, バーンサイド環 $\Omega(B_n)$ の単数群と B_n の指標環の単数群との関係を解明することである.
(2) 第 2 の目的は, 一般化されたバーンサイド環 $A_+(G)$ について単数群, 原子べき等元, 乗法的誘導写像の研究を進展させ, どのような条件のもとでこれらが明らかになるのかを解明する.

３．研究の方法

(1) 第 1 の目的に関して, バーンサイド環 $\Omega(B_n)$ と B_n の指標環の関係を明らかにする. 特に, B_n の指標環と同型な $\Omega(B_n)$ の部分環が存在するかどうかを研究する. さらに, その部分環の単数群の特徴を明らかにする.
(2) 第 2 の目的に関して, 斜バーンサイド環 $X\Omega(G,S)$ やモノミアル・バーンサイド環 $\Omega(G,A)$ について得られた結果をどのようなクラスの一般化されたバーンサイド環で拡張できるのかを研究する. さらに, そのクラスの一般化されたバーンサイド環の例を示し, 具体的な性質を明らかにする.

４．研究成果

(1) 有限左 G 集合 X に対して $[X]$ で X を含む有限左 G 集合の同型類を表す. $R(G)$ を G の指標環とし, 環準同型 $\mathrm{char}:\Omega(G)\to R(G)$, $[X]\mapsto \pi_X$ を, $\pi_X(g)=|X^{\langle g\rangle}|$ $({}^\forall g\in G)$ により定める. ここで $X^{\langle g\rangle}$ は X における $\langle g\rangle$ 不変な元の集合を表す. $C_2=\langle -1\rangle$, $V_n=C_2^{(n)}$ とし, 半直積

$$B_n := C_2 \wr S_n (= V_n \rtimes S_n) = \{(x_1,\ldots,x_n)\sigma \mid (x_1,\ldots,x_n)\in V_n,\quad \sigma\in S_n\}$$

を, $(x_1,\ldots,x_n)\in V_n$ と $\sigma\in S_n$ に対して

$$\sigma(x_1,\ldots,x_n)\sigma^{-1} = (x_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,x_{\sigma^{-1}(n)})$$

であるものとして定義する. $i=0,1,\ldots,n$ に対して,

$$L_{\bar{i}} = \{(x_1,\ldots,x_n)\in V_n \mid x_k=1,\ {}^\forall k\in[i]:=\{1,2,\ldots,i\}\}\quad ([0]=\emptyset)$$

とおき, $\mathcal{P}(i,\bar{i})$ で $\sigma\in S_iS_{\bar{i}}$ ($S_{\bar{i}}$ は $\{i+1,\ldots,n\}$ 上の対称群) を満たす n 次の置換 σ に対する型の集合とする. $\lambda\in\mathcal{P}(i,\bar{i})$ に対して S_λ で λ に対応する Young 部分群で $S_iS_{\bar{i}}$ に含まれるものを表す. $\mathrm{C}(B_n)$ で B_n の非共役な部分群の完全代表系を表す. $\widehat{\mathcal{U}}_n := \{L_{\bar{i}}S_\lambda \mid [i]\subset[n],\ \lambda\in\mathcal{P}(i,\bar{i})\}$ と置くとき, バーンサイド環 $\Omega(B_n)$ の部分環 $\Omega(B_n,\widehat{\mathcal{U}}_n)$ が $\Omega(B_n,\widehat{\mathcal{U}}_n)=\oplus_{H\in\mathrm{C}(B_n)\cap\widehat{\mathcal{U}}_n}\mathbb{Z}[B_n/H]$ により定義される. 本研究では $\mathrm{char}:\Omega(B_n,\widehat{\mathcal{U}}_n)\xrightarrow{\sim} R(B_n)$ が同型写像であることを証明した. 証明には L. Geissinger – D. Kinch による結果を用いた.

$X, X_0, X_1,\ldots,X_i$ を有限左 G 集合として, $\mathrm{Map}(X,X_0,X_1,\ldots,X_i)$ を X から $X_0\dot\cup X_1\dot\cup\cdots\dot\cup X_i$ への写像 f で $\mathrm{Im}\,f\cap X_j\neq\emptyset$ $(j=1,2,\ldots,i)$ を満たすもの全体の集合とする. 任意の $g\in G$ および $f\in\mathrm{Map}(X,X_0,X_1,\ldots,X_i)$ に対して $gf\in\mathrm{Map}(X,X_0,X_1,\ldots,X_i)$ を $(gf)(x)=gf(g^{-1}x)$ $({}^\forall x\in X)$ と定めることにより, $\mathrm{Map}(X,X_0,X_1,\ldots,X_i)$ は左 G 集合となる. 本研究では, 有限左 G 集合 X に対して, $P(X)$ で X の空でない真の部分集合からなる G-poset を表すとき, $\widetilde{\Lambda}_{P(X)}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i[\mathrm{Map}(X,\emptyset,X_1,\ldots,X_i)]\in\Omega(G)$ は, $P(X)$ に対して定まる reduced Lefschetz invariant と呼ばれる位数 2 の単数であることを示した. 有限左 G 集合 X, Y に対して $\widetilde{\Lambda}_{P(X)}\widetilde{\Lambda}_{P(Y)}=\widetilde{\Lambda}_{P(X\dot\cup Y)}$ が成り立つ.

B_n は $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ に自然に作用している. また, B_n は自然に S_{2n} の部分群とみることができ, S_{2n} 集合 $[2n]$ を B_n 集合とみることができる. これより $\Omega(B_n)$ における reduced Lefschetz invariants $\widetilde{\Lambda}_{P([n])}, \widetilde{\Lambda}_{P([2n])}, \widetilde{\Lambda}_{P([n]\dot\cup[2n])}$ が存在する. B_n の 1 次指標は自明な指標 1_{B_n} および 3 つの非自明な指標 $\rho_n : B_n \to \mathbb{C}, (x_1, \ldots, x_n)\sigma \mapsto \mathrm{sgn}_n(\sigma)$ (sgn_n は sign 指標), $\kappa_n := \mathrm{sgn}_{2n}|_{B_n} : B_n \to \mathbb{C}, (x_1, \ldots, x_n)\sigma \mapsto \prod_{i=1}^n x_i$, $\varepsilon_n = \kappa_n\rho_n$ からなり, $R(B_n)$ の単数群は $\langle -1_{B_n}, \rho_n, \kappa_n\rangle$ である. 本研究では

$$\rho_n = \mathrm{char}(\widetilde{\Lambda}_{P([n])}), \quad \kappa_n = \mathrm{char}(\widetilde{\Lambda}_{P([2n])}), \quad \varepsilon_n = \mathrm{char}(\widetilde{\Lambda}_{P([n]\dot\cup[2n])})$$

を証明した. 特に $\Omega(B_n, \widehat{\mathcal{U}}_n)$ の単数群は $\langle -1_{B_n}, \widetilde{\Lambda}_{P([n])}, \widetilde{\Lambda}_{P([2n])}\rangle$ である.

(2) G のモノイド関手 M とは, G の各部分群 H に有限可換モノイド $M(H)$ を対応させる族 $\{M(H)\}_{H\le G}$ で, 部分群の共役 ${}^gH$ や包含関係 $K \le H$ に対して定まるモノイド準同形 con_H^g, res_H^K を備えるものを意味する. モノイド関手 M に対して, $\widetilde{M}(G) := \dot\bigcup_{H\le G} M(H)$ は G が con_H^g により作用する G 集合となるが, 有限 G 集合 X から $\widetilde{M}(G)$ への G 写像 π で $\pi(x) \in M(G_x)$ ($^\forall x \in X$) を満たすもの全体の集合を $T_G^M(X)$ と表すとき, 有限 G 集合 X と $\pi \in T_G^M(X)$ の組 (X, π) を対象とする圏 $\mathbf{El}(T_K^M)$ におけるグロタンディック環を M バーンサイド環といい, $\Omega^M(G)$ で表す. モノミアル・バーンサイド環 $\Omega(G, A)$ は $M(H)$ を H から A への 1 コサイクル全体のなすアーベル群とするときの M バーンサイド環と同型であり, 斜バーンサイド環 $X\Omega(G, S)$ は $M(H)$ を H が自明に作用する S の元全体 $C_S(H)$ のなすモノイドとするときの M バーンサイド環と同型である. 本研究では, 任意の $K \le H \le G$ および $(V, \lambda) \in \mathbf{El}(T_K^M)$ に対する H 写像 $\lambda^{\otimes H} : \mathrm{Map}_K(H, V) \to \widetilde{M}(H)$ の族が存在して, 次の条件 1–5 を満たすならば, 任意の $H \le G$ に対して $\Omega^M(H)$ から $\Omega^M(G)$ への乗法的誘導写像が存在することを示した. ここで, $\mathrm{Map}_K(H, V)$ は H から V への K 写像の集合で, テンソル誘導と呼ばれる H 集合である.

1. 任意の $f \in \mathrm{Map}_K(H, V)$ に対して, $\lambda^{\otimes H}(f)$ は $M(H_f)$ の元であり $\{\lambda(f(h)) \mid h \in H\}$ のみに依存する.

2. 任意の $H \le G$, $(J, \pi) \in \mathbf{El}(T_H^M)$, および $f \in \mathrm{Map}_H(H, J)$ に対して, $\pi^{\otimes H}(f) = \pi(f(\epsilon))$ が成り立つ. ここで ϵ は単位元である.

3. $K \le H \le G$, $(V, \lambda), (V_0, \lambda_0) \in \mathbf{El}(T_K^M)$ について, 同型 $\zeta : (V_0, \lambda_0) \xrightarrow{\sim} (V, \lambda)$ が存在すれば, 任意の $f \in \mathrm{Map}_K(H, V_0)$ に対して
$$\lambda_0{}^{\otimes H}(f) = \lambda^{\otimes H}(\zeta \circ f)$$
が成り立つ.

4. $K \le H \le G$, $(V_1, \lambda_1), (V_2, \lambda_2) \in \mathbf{El}(T_K^M)$ とするとき, 任意の K 写像 $f_1 : H \to V_1$, $f_2 : H \to V_2$ に対して, $f_0 : H \to V_1 \times V_2$ が $f_0(h) = (f_1(h), f_2(h))$ ($^\forall h \in H$) で定義される K 写像ならば,
$$(\lambda_1 \cdot \lambda_2)^{\otimes H}(f_0) = (\lambda_1^{\otimes H} \cdot \lambda_2^{\otimes H})((f_1, f_2))$$
が成り立つ. ここで $(f_1, f_2) \in \mathrm{Map}_K(H, V_1) \times \mathrm{Map}_K(H, V_2)$ である.

5. $K \le H \le G$, $U \le H$ とし, $\{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ を両側剰余類 $U\backslash H/K$ の完全代表系とする. 任意の K 集合 V, $f \in \mathrm{Map}_K(H, V)$, および $1 \le i \le m$ に対して, $U \cap {}^{h_i}K$ 写像 $f_{h_i} : U \to \mathrm{res}_{U\cap {}^{h_i}K}^{{}^{h_i}K} \circ \mathrm{con}_K^{h_i}(V)$ を
$$r \mapsto h_i \otimes f(h_i^{-1}r) \qquad (^\forall r \in U)$$
により定義する. このとき, 任意の $(V, \lambda) \in \mathbf{El}(T_K^M)$ および $f \in \mathrm{Map}_K(H, V)$ に対して
$$\mathrm{res}_{U_f}^{H_f}(\lambda^{\otimes H}(f)) = \prod_{i=1}^m (({}^{h_i}\lambda)|_{U\cap {}^{h_i}K})^{\otimes U}(f_{h_i})$$
が成り立つ.

斜バーンサイド環について, $X\Omega(H, S)$ から $X\Omega(G, S)$ への乗法的誘導写像が知られており, バーンサイド環の間のテンソル誘導写像の自然な拡張となっているが, それは先に述べた十分条件のもとで得られる. モノミアル・バーンサイド環についても, $\Omega(H, A)$ から $\Omega(G, A)$ への乗法的誘導写像が定義されているが, それも先に述べた十分条件のもとで得られることを示した.

M バーンサイド環はゴースト環に埋め込まれるが, 先に述べた十分条件のもとで, $\Omega^M(H)$ から $\Omega^M(G)$ への乗法的誘導写像はゴースト環の間の乗法的誘導写像を引き起こすことも証明した.

(3) $\boldsymbol{\Gamma}$ を有限圏とする. $\boldsymbol{\Gamma}$ における同型類の集合は $\boldsymbol{\Gamma}/\simeq$ で表される. $\boldsymbol{\Gamma}$ の対象 I と J に対して, I から J への射の集合は $\boldsymbol{\Gamma}(I,J)$ で表される. $\boldsymbol{\Gamma}/\simeq$ および $\boldsymbol{\Gamma}(I,J)$ は有限集合である. $\mathbb{Z}\boldsymbol{\Gamma}$ により $\boldsymbol{\Gamma}/\simeq$ 上の自由アーベル群を表す. $\boldsymbol{\Gamma}$ の対象 I を含む同型類を $[I]$ で表す. $\boldsymbol{\Gamma}$ のゴースト環 $\mathbb{Z}^{\boldsymbol{\Gamma}}$ は

$$\mathbb{Z}^{\boldsymbol{\Gamma}} = \prod_{[I]\in\boldsymbol{\Gamma}/\simeq} \mathbb{Z}$$

で定義される. 加法群の写像 $\varphi_{\boldsymbol{\Gamma}} : \mathbb{Z}\boldsymbol{\Gamma} \to \mathbb{Z}^{\boldsymbol{\Gamma}}$ を

$$[J] \mapsto (|\boldsymbol{\Gamma}(I,J)|)_{[I]\in\boldsymbol{\Gamma}/\simeq} \qquad ({}^\forall[J] \in \boldsymbol{\Gamma}/\simeq) \tag{1}$$

により定める. 加法群 $\mathbb{Z}\boldsymbol{\Gamma}$ は $\varphi_{\boldsymbol{\Gamma}}$ が単射環準同形であるような環構造を持つとき, 抽象バーンサイド環と呼ばれる. I を $\boldsymbol{\Gamma}$ の対象とする. $\mathrm{Aut}(I)$ で I の自己同形群を表す. 各 $\sigma \in \mathrm{Aut}(I)$ に対して, $\boldsymbol{\Gamma}$ における射 $c_\sigma : I \to I/\sigma$ が σ と id_I の余等化子であるとは, $c_\sigma \circ \sigma = c_\sigma$ が成り立ち, さらに, 任意の $f \circ \sigma = f$ を満たす $\boldsymbol{\Gamma}$ における射 $f : I \to J$ に対して, $f = f_1 \circ c_\sigma$ を満たす $\boldsymbol{\Gamma}$ における唯一の射 $f_1 : I/\sigma \to J$ が存在することをいう. 以後, $\boldsymbol{\Gamma}$ は射に関する epi-mono 分解と呼ばれる条件を満たすとし, 任意の $\boldsymbol{\Gamma}$ の対象 I および任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(I)$ に対して, σ と id_I の余等化子が存在すると仮定する. このとき $\mathbb{Z}\boldsymbol{\Gamma}$ は抽象バーンサイド環であることが知られている.

I を $\boldsymbol{\Gamma}$ の対象とする. 加法群の写像 $\omega_I : \mathbb{Z}\boldsymbol{\Gamma} \to \Omega(\mathrm{Aut}(I))$ を

$$[J] \mapsto [\boldsymbol{\Gamma}(I,J)] \qquad ({}^\forall J \in \boldsymbol{\Gamma})$$

で定める. ここで $\mathrm{Aut}(I)$ の $\boldsymbol{\Gamma}(I,J)$ 上の作用は

$$\sigma f = f \circ \sigma^{-1} \qquad ({}^\forall\sigma \in \mathrm{Aut}(I), {}^\forall f \in \boldsymbol{\Gamma}(I,J))$$

で定める. 任意の $\boldsymbol{\Gamma}$ の対象 I に対して, $\omega_I : \mathbb{Z}\boldsymbol{\Gamma} \to \Omega(\mathrm{Aut}(I))$ は環準同形であると仮定する. $\widetilde{x} = (x_{[I]})_{[I]\in\boldsymbol{\Gamma}/\simeq}$ を $\mathbb{Z}^{\boldsymbol{\Gamma}}$ の単数とし, 各 $[I] \in \boldsymbol{\Gamma}/\simeq$ に対して, 写像 $\gamma_I^{\widetilde{x}} : \mathrm{Aut}(I) \to \langle -1 \rangle$ を

$$\sigma \mapsto x_{[I]} x_{[I/\sigma]} \qquad ({}^\forall\sigma \in \mathrm{Aut}(I))$$

で定める. 本研究では, このとき $\widetilde{x} = \varphi_{\boldsymbol{\Gamma}}(x)$ を満たす $\mathbb{Z}\boldsymbol{\Gamma}$ の単数 x が存在するための必要十分条件は, 任意の $[I] \in \boldsymbol{\Gamma}/\simeq$ に対して $\gamma_I^{\widetilde{x}} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Aut}(I), \langle -1 \rangle)$ が成り立つことであるということを示した.

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　4件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 T. Yoshida, F. Oda, and Y. Takegahara	4．巻 505
2．論文標題 Axiomatic theory of Burnside rings. (I)	5．発行年 2018年
3．雑誌名 Journal Algebra	6．最初と最後の頁 339-382
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2018.03.012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 F. Oda, Y. Takegahara, and T. Yoshida	4．巻 512
2．論文標題 Lefschetz invariants and Young characters for representations of the hyperoctahedral groups	5．発行年 2018年
3．雑誌名 Journal Algebra	6．最初と最後の頁 1-19
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2018.07.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Takegahara Yugen	4．巻 47
2．論文標題 The number of subgroups of a finite group (II)	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Communications in Algebra	6．最初と最後の頁 1964～1972
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/00927872.2018.1527918	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Takegahara Yugen	4．巻 349
2．論文標題 p-adic estimates of the number of permutation representations	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Advances in Mathematics	6．最初と最後の頁 367～425
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2019.04.008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 小田文仁，竹ヶ原裕元，吉田知行
２．発表標題 Axiomatic theory of Burnside rings I
３．学会等名 ２０１８年日本数学会年会，東京大学
４．発表年 2018年

１．発表者名 竹ヶ原裕元
２．発表標題 モノミアル・バーンサイド環の乗法的性質について
３．学会等名 有限群のコホモロジー論とその周辺　RIMS 共同研究（公開型）
４．発表年 2019年

１．発表者名 小田文仁，竹ヶ原裕元，吉田知行
２．発表標題 Lefschetz invariants and Young characters for representations of the Coxeter groups of type B
３．学会等名 日本数学会２０１７年度秋季総合分科会
４．発表年 2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考