

令和 6 年 6 月 20 日現在

機関番号：11302

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2023

課題番号：16K05053

研究課題名(和文)ハイパースペシャル・コンパクト群の既約表現の研究とその応用

研究課題名(英文) Study on irreducible representations of hyperspecial compact group and its applications

研究代表者

高瀬 幸一 (Takase, Koichi)

宮城教育大学・教育学部・特任教授

研究者番号：60197093

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：1) 局所体の整数環上定義された古典型の群スキームの reduction として生じる有限群の正則既約複素線形表現のパラメータ付けを与えた。結果は Regular irreducible representation of classical groups over finite rings (Pacific Journal of Math. (2021), 221-256) として発表した。

2) 局所体上の特殊線形群、及び斜交群の超尖点的既約表現を具体的に構成し、それに対して「形式的次数予想」と「ルートナンバー予想」が成り立つことを確かめた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

局所体の整数環上定義された群スキームから reduction により生じる有限群の既約表現を決定することは、有限群の一般論から興味深いばかりではなく、局所体上の代数群の超尖点的既約表現を具体的に構成する際に非常に有効に用いることができるので、極めて重要な研究課題である。本研究では、有限群の既約表現の中でも generic な位置にある regular な既約表現の完全なパラメータ付けを与えることに成功した。更にその応用として、斜交群と特殊線形群の超尖点的既約表現を具体的に構成して、「形式的次数予想」と「ルートナンバー予想」が成り立つことを確かめることができた。

研究成果の概要(英文)：1) A natural parametrization of the regular irreducible complex linear representations of the finite group defined as a finite reduction of a group scheme defined over the integer ring of a non-Archimedean local field is given. The results are presented by Regular irreducible representations of classical groups over finite quotient rings (Pacific Journal of Mathematics (2021) 221-256)

2) As an application of the results of 1), certain supercuspidal representations of the symplectic group and the special linear group over non-Archimedean local field are explicitly constructed, and the formal degree conjecture and the root number conjecture are verified. The results are presented by On certain supercuspidal representations of symplectic groups associated with tamely ramified extensions: the formal degree conjecture and the root number conjecture (arXiv:2109.07124).

研究分野：局所体上の代数群の表現論

キーワード：Weil 表現 超尖点的既約表現 Jordan 三重系 Jordan 代数 正則離散系列表現 球関数 Laplace 変換

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C-19, F-19-1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

保形型式の表現論的研究は、局所体上の簡約代数群の表現論の研究を基礎とする。その第一歩は既約表現の分類であるが、それは放物的部分群からの誘導表現の既約成分の構成を通して、実数体上では簡約実 Lie 群の離散系列表現、被アルキメデス局所体上では簡約代数群の超尖点的既約表現の分類に帰着される。実数体上では、離散系列表現は Harish-Chandra の研究によりある程度の理解に達しているが、非アルキメデス的局所体上の超尖点的既約表現は複雑で、十分な理解が進んでいない。その意味で、超尖点的既約表現を深く理解することが重要な研究課題となる。

### 2. 研究の目的

非アルキメデス的局所体上の具体的な半単純代数群に注目して、その超尖点的既約表現を可能な限り具体的に構成し、その性質を可能な限り明示的に調べるのが研究の目的である。局所体上の簡約群の表現論では、実数体上と非アルキメデス的局所体上で平行する結果が得られることが多く、これを Harish-Chandra は Lefschetz 原理と呼んでいる。そこで、実数体上の離散系列表現の性質を参照しながら、同様の結果を超尖点的既約表現に対して調べるのである。幾つかの例として

- 最小の  $K$ -タイプは存在するか？その重複度は 1 であるか？
- 超尖点的既約表現に対して、その  $K$ -タイプの重複度について Blattner 型の公式は成り立つか？
- 超尖点的既約表現の適当な  $K$ -タイプに付随する球関数を具体的に求めることはできるか？
- 超尖点的既約表現に付随する Langlands パラメータ (の候補) が自然に構成され、予想される性質 (形式的次数予想, ルート・ナンバー予想等) を満たすか？

などの問題が重要な研究課題である。

### 3. 研究の方法

非アルキメデス的局所体  $F$  の整数環  $O_F$  上定義された簡約代数群  $G$  に対して、コンパクト部分群  $G(O_K) \subset G(F)$  の既約表現  $\delta$  をとり、コンパクト誘導表現  $\text{ind}_{G(O_F)}^{G(F)} \delta$  として  $G(F)$  の超尖点的既約表現を構成する。 $\delta$  は有限群  $G(O_F/\mathfrak{p}_F^r)$  ( $\mathfrak{p}_F \subset O_F$  は唯一の極大イデアル,  $r > 0$ ) の既約表現と自然な全射  $G(O_F) \rightarrow G(O_F/\mathfrak{p}_F^r)$  を經由するから、有限群  $G(O_F/\mathfrak{p}_F^r)$  の既約表現を詳しく知りたい。 $r = 1$  の場合、即ち有限体  $\mathbb{F} = O_F/\mathfrak{p}_F$  上の簡約代数群  $G(\mathbb{F})$  の既約表現は Deligne-Lusztig の理論 [1] により理解されている。そこで  $r > 1$  の場合の一般論を確立することが研究の第一歩となる。次に、そのようにして構成された  $G(O_F)$  の既約表現から構成された  $G(F)$  の超尖点的既約表現  $\pi_\delta = \text{ind}_{G(O_F)}^{G(F)} \delta$  の Langlands パラメータ (の候補) を  $\delta$  に関するデータから構成する方法を確立しなければならない。更にそうして得られた Langlands パラメータ (の候補) から、予想される超尖点的既約表現の性質が従うことを確かめる必要がある。以上の研究課題を、 $\delta$  を可能な限り具体的に・明示的に構成することにより解明する。

#### 4. 研究成果

- (1) 非アルキメデスの局所体  $F$  の整数環  $O_F$  上で定義された古典型の群スキーム  $G$  に対して、有限群  $G(O_F/\mathfrak{p}_F^r)$  ( $r > 1$ ) の既約表現の中で、 $G$  の Lie 環の正則随伴軌道に対応するものを具体的に構成した。そのために Clifford の議論を用いた。即ち、 $r = l + l'$  ( $0 < l' < l$ ) なる最小の整数  $l$  をとり、自然写像  $G(O_F/\mathfrak{p}_F^r) \rightarrow G(O_F/\mathfrak{p}_F^l)$  の核を  $G(\mathfrak{p}_F^l/\mathfrak{p}_F^r)$  とすると、自然な群同型  $\mathfrak{g}(O_F/\mathfrak{p}_F^l) \rightarrow \mathfrak{g}(\mathfrak{p}_F^l/\mathfrak{p}_F^r)$  が成り立つ。ここで  $\mathfrak{g}$  は  $G$  の  $O_F$  上の Lie 環で、 $O_F$ -群スキームである。特に  $\mathfrak{g}(O_F/\mathfrak{p}_F^l)$  は加法群であり、 $G(\mathfrak{p}_F^l/\mathfrak{p}_F^r)$  の既約指標 (即ち 1 次元表現) は、 $\mathfrak{g}$  上の不変形式を通して  $\mathfrak{g}(O_F/\mathfrak{p}_F^l)$  の元  $\beta$  の随伴軌道と一対一に対応する。それを  $\chi_\beta$  と書こう。このとき  $G(O_F/\mathfrak{p}_F^r)$  の既約表現で  $\chi_\beta$  を含むものは、 $\chi_\beta$  の固定部分群

$$G(O_F/\mathfrak{p}_F^r; \chi_\beta) = \left\{ g \in G(O_F/\mathfrak{p}_F^r) \mid \begin{array}{l} \chi_\beta(ghg^{-1}) = \chi_\beta(h) \\ \text{for } \forall h \in G(\mathfrak{p}_F^l/\mathfrak{p}_F^r) \end{array} \right\}$$

の既約表現で  $\chi_\beta$  を含むものからの誘導標元として実現される。そのような  $G(O_F/\mathfrak{p}_F^r; \chi_\beta)$  の既約表現の構成は、 $r$  が偶数の場合には容易であって、 $r$  が奇数の場合が問題の中心である。そのために有限体上の Weil 表現を用いるのが、この議論の第一のポイントである。第二のポイントを簡潔に説明するために、 $\beta \in \mathfrak{g}(O_F/\mathfrak{p}_F^l)$  の自然な像  $\dot{\beta} \in \mathfrak{g}(\mathbb{F})$  ( $F = O_F/\mathfrak{p}_F$ ) の中心化群

$$G_\beta = \left\{ g \in G \mid \text{Ad}(g)\dot{\beta} = \dot{\beta} \right\}$$

が有限体  $\mathbb{F}$  上の代数群であり、かつ可換であると仮定する。このとき、自然な手順でコホモロジー類  $[c_{\beta, \rho}] \in H^2(G_\beta(\mathbb{F}), \mathbb{C}^\times)$  が定義される。ここで  $\rho: Z_{\mathfrak{g}(\mathbb{F})}(\dot{\beta}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$  は加法群の指標である。このコホモロジー類の本質は依然として不明であるが、議論の第二のポイントはコホモロジー類  $[c_{\beta, \rho}]$  が全ての  $\rho$  に対して自明となることである。この自明性は、[7] により  $G = GL_n$  ( $n = 2, 3, 4$ ) に対して具体的に計算して示され、一般に成り立つと予想されていたものであるが、[5] により一般の  $G = GL_n$  に対して証明され、それに基づいて [6] により一般の古典型の  $G$  に対して証明された。それらの結果から ( $r$  が偶数の場合も同様に)  $G(O_F/\mathfrak{p}_F^r)$  の既約表現で  $\chi_\beta$  を含むものは、 $G_\beta(O_F/\mathfrak{p}_F^r)$  の指標 (1 次元表現) によりパラメータ付けされることが証明された。それが [6] の主結果である。

- (2) [8] と [9] では、[6] の一般論の応用として  $G(F)$  の超尖点的既約表現を構成した。即ち  $G$  が斜交群  $Sp_{2n}$  及び特殊線形群  $SL_n$  の場合に、[6] で展開した理論により  $G(O_F/\mathfrak{p}_F^r)$  ( $r > 1$ ) の既約表現を構成する。この際に  $\beta \in \mathfrak{g}(O_F/\mathfrak{p}_F^l)$  を適宜にとって中心化群  $G_\beta(O_F)$  が  $F$  の馴分岐拡大体  $K/F$  のノルム 1 部分群と同型になるように出来る。このとき  $G_\beta(O_F/\mathfrak{p}_F^r)$  の指標  $\rho$  に対応する  $G(O_F/\mathfrak{p}_F^r)$  の既約表現を  $\delta_{\beta, \rho}$  とし、自然写像  $G(O_F) \rightarrow G(O_F/\mathfrak{p}_F^r)$  を通して定義される  $G(O_F)$  の既約表現を同じく  $\delta_{\beta, \rho}$  とする。このときコンパクト誘導表現  $\pi_{\beta, \rho} = \text{ind}_{G(O_F)}^{G(F)} \delta_{\beta, \rho}$  は超尖点的既約表現となる。超尖点的既約表現のこのような構成法は Shintani [4] に始まり Gérardin [2] により  $GL_n$  の場合 (但し  $K/F$  は不分岐) に議論された方法である。この議論では  $G(O_F)$  の既約表現  $\delta_{\beta, \rho}$  を非常に明示的に構成していることが新しい。特に  $\pi_{\beta, \rho}$  における  $\delta_{\beta, \rho}$  の重複度は 1 である。更に  $G(O_F/\mathfrak{p}_F^s)$  ( $1 \leq s < r$ ) を経由する  $G(O_F)$  の既約表現は  $\pi_{\beta, \rho}$  に現れないという意味で、 $\delta_{\beta, \rho}$  は  $\pi_{\beta, \rho}$  の「最小の」 $G(O_F)$ -タイプである。

- (3) [10] では  $G = Sp_{2n}$  の場合に, 上で構成した超尖点的既約表現  $\pi_{\beta,\rho}$  は,  $K/F$  が不分岐ならば generic であること, 即ち  $G$  の極大冪零部分群  $N$  の指標 (一次元表現)  $\chi$  に対して,  $\text{Hom}_{G(F)}(\pi_{\beta,\rho}, \text{Ind}_{N(F)}^{G(F)}\chi) \neq 0$  なる  $\chi$  が存在すること, を示した. その場合に  $\chi$  を明示的に求めた.
- (4) [8] と [9] の主結果は,  $G = Sp_{2n}$  と  $G = SL_n$  の場合に超尖点的既約表現  $\pi_{\beta,\rho}$  に付随する Langlands パラメータ (の候補) を決定し, それに対して形式的次数予想とルート・ナンバー予想が成り立つことを確かめたことである. 即ち  $\beta$  により馴分岐拡大  $K/F$  が定まり,  $\rho$  から  $K$  のノルム 1 部分群  $U$  の指標と同一視できる. ここで  $T(F) = U$  なる  $G$  の極大トーラス  $T$  を取ることが出来て, トーラスに関する Langlands 対応と局所類体論により, 群同型  $H_{\text{conti.}}^1(W_F, T^\wedge) \rightarrow \text{Hom}_{\text{conti.}}(U, \mathbb{C}^\times)$  を得る. ここで  $W_F$  は  $F$  の Weil 群,  $T^\wedge$  は  $T$  の dual torus である. よって  $\rho \in \text{Hom}_{\text{conti.}}(U, \mathbb{C}^\times)$  からコホモロジー類  $[\alpha] \in H_{\text{conti.}}^1(W_F, T^\wedge)$  が定まり, これは群準同型写像

$$\tilde{\alpha} : W_F \xrightarrow{\sigma \mapsto (\sigma, \alpha(\sigma))} {}^L T = W_F \triangleleft T^\wedge$$

を生じる. 更に Langlands-Schelstad の方法 [3] により, 群準同型写像

$$(\text{LS}) : {}^L T \rightarrow {}^L G = \begin{cases} SO_{2n+1}(\mathbb{C}) & : G = Sp_{2n}, \\ PGL_n(\mathbb{C}) & : G = SL_n \end{cases}$$

が得られるから, その合成写像  $\varphi : W_F \xrightarrow{\tilde{\alpha}} {}^L T \xrightarrow{(\text{LS})} {}^L G$  を明示的に書き下して, それを  $\pi_{\beta,\rho}$  の Langlands パラメータであるとみなすと, 形式的次数予想とルート・ナンバー予想が成り立つことを示したのが, [8] と [9] の主結果である.

#### <参考文献>

- [1] P. Deligne, G. Lusztig : *Representations of Reductive Groups Over Finite Fields* (Ann. of Math. vol. 103 (1976), 103–161)
- [2] P.Gérardin : *Sur les représentations du groupes linéaire  $g$ -'enéral sur un corp  $p$ -adique* (Sém.Delange-Pisot-Poitou 14 (1972-1973) exp. 12)
- [3] R.P.Langlands, D.Shelstad : *On the Definition of Transfer Factors* (Math. Ann. 278 (1987), 219-271)
- [4] T.Shintani : *On certain square integrable unitary representations of some  $p$ -adic linear groups* (J.Math.Soc.Japan, 20 (1968), 522-565)
- [5] A.Stasinski, S.Stevens : *The regular representations of  $GL_n$  over finite local principal ideal rings* (Bull. London Math. Soc. 49 (2017), 1066–1084)
- [6] K.Takase : *Regular irreducible representations of classical groups over finite quotient rings* (Pacific J. of Math. 331 (2021), 221-256)

- [7] K.Takase : *Regular characters of  $GL_n(O)$  and Weil representations over finite fields* (Journal of Algebra 449 (2016), 184-213)
- [8] K.Takase : *On certain supercuspidal representations of symplectic groups associated with tamely ramified extensions : the formal degree conjecture and the root number conjecture* (arXiv:2109.07124)
- [9] K.Takase : *On certain supercuspidal representations of  $SL_n(F)$  associated with tamely ramified extensions : the formal degree conjecture and the root number conjecture* (arXiv:2109.04642)
- [10] K.Takase : *On generic supercuspidal representations of  $Sp_{2n}$*  (arXiv:1705.07268)

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 3件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Koichi Takase	4. 巻 311
2. 論文標題 Regular irreducible representations of classical groups over finite quotient rings	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Pacific Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 221-256
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/pjm.2021.311-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Koichi Takase	4. 巻 -
2. 論文標題 On certain supercuspidal representations of $SL_n(F)$ associated with tamely ramified extensions: the formal degree conjecture and the root number conjecture	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 arXiv:2109.04642	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Koichi Takase	4. 巻 -
2. 論文標題 On certain supercuspidal representations of symplectic groups associated with tamely ramified extensions: the formal degree conjecture and the root number conjecture	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 arXiv:2109.07124	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Koichi Takase	4. 巻 2204
2. 論文標題 On supercuspidal representation of $Sp_{2n}$ and Langlands parameters	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 78-95
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Koichi Takase	4. 巻 311
2. 論文標題 Regular irreducible representations of classical groups over finite quotient rings	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Pacific Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 221-256
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/pjm.2021.311-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takase, Koichi	4. 巻 -
2. 論文標題 Regular irreducible representations of classical groups over finite quotient rings	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 arXiv.org (to be published on Pacific Journal of Mathematics)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Takase, Koichi	4. 巻 -
2. 論文標題 On supercuspidal representations of $SL_n(F)$ associated with tamely ramified extensions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 arXiv.org (arXiv:1805.06186v2)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Takase, Koichi	4. 巻 1805
2. 論文標題 On supercuspidal representations of $SL_n(F)$ associated with tamely ramified extensions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 arXiv.org	6. 最初と最後の頁 1-25
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Koichi Takase	4. 巻 -
2. 論文標題 On generic supercuspidal representations of $Sp(2n)$	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Cornel University Library	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Koichi Takase	4. 巻 -
2. 論文標題 Regular irreducible characters of a hyperspecial compact group	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Cornel University Library	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 Koichi Takase
2. 発表標題 On supercuspidal representations of $Sp(2n)$ and Langlands parameters
3. 学会等名 RIMS共同研究「保形形式, 保形表現, ガロア表現とその周辺」(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Koichi Takase
2. 発表標題 On supercuspidal representations of $Sp(2n)$ and Langlands parameters
3. 学会等名 RIMS共同研究「保形形式, 保形表現, ガロア表現とその周辺」(国際学会)
4. 発表年 2021年



〔図書〕 計2件

1. 著者名 Andrew V. Sills (高瀬幸一訳)	4. 発行年 2021年
2. 出版社 共立出版	5. 総ページ数 294
3. 書名 魅惑のロジャーズ-ラマヌジャン恒等式	

1. 著者名 G.H.Hardy (高瀬幸一訳)	4. 発行年 2016年
2. 出版社 丸善出版	5. 総ページ数 384
3. 書名 ラマヌジャン：その生涯と業績に想起された主題による十二の講義	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------