

令和元年6月24日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05058

研究課題名(和文) 双直交多項式による平面分割の解析

研究課題名(英文) Plane partitions from the viewpoint of biorthogonal polynomials

研究代表者

上岡 修平 (Kamioka, Shuhei)

京都大学・情報学研究科・助教

研究者番号：70543297

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：非負整数を成分とする2次元配列で各行・各列が弱い意味で単調減少なものを平面分割という。本研究では(逆)平面分割のよい母関数すなわち積型の表示を持つ母関数を、双直交多項式というクラスの直交多項式から、または双直交多項式に付随する力学系である離散2次元戸田格子の解から構成するための手続きを定式化した。さらにその手続きを用いて、MacMahon母関数やトレース母関数などの既知の母関数を一般化するような新しい母関数を導出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

組合せ論的オブジェクトである平面分割は、それ自身に対する研究のみならず、数学の他分野に関連付けられたり物理学などの他領域に応用されたりしている。その背景には積型のよい母関数の数学的な扱いやすさがある。平面分割のよい母関数の存在は応用も含めて重要であるが、よい母関数を系統的に見つけるための処方箋はこれまでなかった。本研究の意義は、双直交多項式などの他分野の道具をうまく用いることで、平面分割のよい母関数を系統的に構成するための手続きを作り出した点にある。本研究で生み出した新しい母関数は、平面分割への理解を深めるだけでなく将来的に他分野への応用にも繋がると期待される。

研究成果の概要(英文)：A plane partition is a two-dimensional array of non-negative integers which weakly decrease along each row and column. In this study a method is formulated to find nice (product) formulas for (reverse) plane partitions from biorthogonal polynomials and from solutions to the discrete two-dimensional (2D) Toda lattice, that is a dynamical system associated with biorthogonal polynomials. New nice formulas which generalizes some of the existing generating functions for (reverse) plane partitions, such as MacMahon's generating function and the trace generating function, are derived from a specific family of biorthogonal polynomials and from a specific solution to the discrete 2D Toda lattice.

研究分野：数え上げ組合せ論

キーワード：平面分割 直交多項式 数え上げ組合せ論 可積分系

1. 研究開始当初の背景

非負整数を成分とする2次元配列（行列）で各行・各列が弱い意味で単調減少なものを平面分割（plane partition）という。平面分割は整数分割の一般化であり、整数分割をヤング図形で表すように、平面分割は単位立方体の箱を積み上げた3次元ヤング図形で表す。平面分割の起源はP. A. MacMahonによる数え上げの研究にある。MacMahonの研究の中で最も重要なもののひとつは平面分割の厳密な母関数

$$\sum_{\pi} q^{|\pi|} = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}}$$

（MacMahon母関数）である（参考文献①）。ただし左辺の和は、3次元ヤング図形が辺長 $a \times b \times c$ の直方体に収まるような平面分割すべてにわたってとる。また平面分割 π に対して $|\pi|$ は3次元ヤングに含まれる単位立方体の個数（すなわち体積）を表す。

MacMahon母関数のような積型の表示を持つ母関数（または分配関数）は「よい母関数」と呼ばれる。よい母関数のような積型の関数は数学的に扱いやすく、また一般化や特殊化を探す際にもその指針を立てやすい。平面分割の研究は、表現論や対称関数に基づく代数的解析や、素粒子物理学のトイモデルである位相的弦理論との関連など、他分野も巻き込みつつ発展を続けているが、それはMacMahon母関数などのよい母関数の扱いやすさに根ざす部分が多い。そのため現在では「平面分割のよい母関数を新しく見つける」ことが重要な問題となっている。

直交多項式は多項式空間の直交基底であり、数学や物理学のさまざまな分野で利用されている。直交多項式の研究は組合せ論の分野でもさかんである。本研究の代表者は先行研究において、直交多項式をツールとして組合せ論の問題に取り組んできた。その中でアステカダイヤモンドのタイル貼りという別の組合せ論的オブジェクトを調べ、そこに現れるよい母関数は、あるクラスの直交多項式から導出可能であることを明らかにした（参考文献②）。このような経緯から、平面分割のよい母関数を見つけないという目的にも直交多項式は役に立つという着想に至った。

【参考文献】

- ① P. A. MacMahon, *Combinatory Analysis*, vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1916.
- ② S. Kamioka, Laurent biorthogonal polynomials, q-Narayana polynomials and domino tilings of the Aztec diamonds, *J. Combin. Theory Ser. A* **123** (2014), 14–29.

2. 研究の目的

本研究では双直交多項式を用いて、平面分割のよい母関数を系統的につくるための手法を構築し、さらにそれを用いて、これまでにないようなよい母関数をつくることを目的とする。特に、任意の双直交多項式から平面分割のよい母関数を積表示込みで導出するための手続きを定式化する。さらにそれを用いて、ヤコビ多項式やその拡張などの具体的な双直交多項式からよい母関数の具体例をつくる。

3. 研究の方法

研究の目的で述べた通り、本研究では（1）任意の双直交多項式から平面分割のよい母関数を導出するための手続きを定式化する。さらに（2）その手続きに沿って、ヤコビ多項式やその拡張などの具体的な双直交多項式からよい母関数の具体例をつくる。それぞれの研究方法の

詳細を以下に記す。

(1) 本研究では、双直交多項式を用いて組合せ論の問題にアプローチする。双直交多項式は組合せ論の文脈で導入されたものではない。しかし、そのサブクラスの一つについては格子路による組合せ論的な解釈が知られている。また古典的な事実として、平面分割と「格子路の非交叉配置」を同一視するための全単射が存在する。こうした背景により「双直交多項式の格子路による組合せ論的解釈」から本研究を始める。

双直交多項式は、双直交性を定めるモーメント汎関数と、隣接関係を定める隣接係数により特徴付けられる。格子路による組合せ論的解釈のコアは、隣接係数によるモーメント汎関数の明示式である。この明示式を格子路のウェイト和の形で組合せ論的に書き下す。その帰結として格子路の非交叉配置に関する「ウェイト和 = 隣接係数の積」の形の一般公式を得る。さらに上述の全単射を用いて、この公式を平面分割に関する「ウェイト和 = 隣接係数などの積」の形の一般公式に翻訳する。この翻訳作業が、双直交多項式から平面分割のよい母関数を導出するための手続きである。

(2) (1) で定式化した手続きに沿って、平面分割のよい母関数の具体例を計算する。本研究の手法では、双直交多項式を特徴付ける隣接係数の値が分かっているならば、それを(1)でつくった一般公式に代入するだけで、平面分割のよい母関数の具体例がひとつ求まる。ヤコビ多項式などの古典直交多項式はそのような双直交多項式の典型例である。そこで本研究では最初の具体例として、ヤコビ多項式やなどの古典直交多項式から平面分割のよい母関数を導出する。さらにそれを足掛かりにして、例えば隣接係数の構造を保ったまま古典直交多項式を拡張するなどして、より多くのパラメータを含むようなよい母関数を探索する。

4. 研究成果

(1) 双直交多項式による平面分割のよい母関数の導出 (5. 雑誌論文⑤)

一般の双直交多項式に対して格子路による組合せ論的な解釈を与えた。特に双直交多項式を特徴付けるモーメント汎関数に対して、2点間を結ぶ格子路のウェイト和という組合せ論的な量を用いた明示式を与えた。そこで用いた格子路は、正方格子上を右ステップと上ステップのみで進むという単純なものである。

この格子路による解釈に基づき、一般の双直交多項式から平面分割のよい母関数を導出するための手続きを確立した。この手続きは任意の双直交多項式に適用できる系統的なものである。特に双直交多項式を特徴付ける隣接係数から、平面分割のウェイトと、それに対応する母関数の積表示を同時に求めることができる。

この手続きを古典直交多項式のひとつであるlittle q -Laguerre多項式に適用することで、平面分割のよい母関数の具体例を導出した。さらにlittle q -Laguerre多項式を適切に一般化することで、このよい母関数をさらに多くのパラメータを含むものに拡張することに成功した。ここで導出したよい母関数は、MacMahon母関数と、平面分割の分野で最も基本的な母関数のひとつであるトレース母関数(参考文献③)の両者を含んでおり、そのような例はこれまで知られていなかった。

(2) 離散2次元戸田格子による(逆)平面分割のよい母関数の導出(雑誌論文①, ③)

離散2次元戸田格子は行列式による厳密解を持つ離散力学系であり、可積分系の分野でよく調べられている。特に離散2次元戸田格子は、双直交多項式の変形理論(スペクトル変換)と関係が深く、その発展方程式は双直交多項式を特徴付ける隣接係数の変形方程式として理解で

きる。本研究ではこの関係に着目し、双直交多項式による成果(1)をさらに拡張するべく、離散2次元戸田格子の平面分割への応用可能性について調査した。

まず離散2次元戸田格子の発展方程式に対して、格子路による組合せ論的な解釈を与えた。そこで用いた格子路は(1)で用いたものと全く同じものである。さらにその解釈に基づき、離散2次元戸田格子の任意の解から平面分割のよい母関数を導出するための一般公式をつくった。この公式は(1)で調べた(長方形枠の)平面分割のみならず、任意のヤング図形を枠とする逆平面分割に対しても適用可能である。この一般公式に離散2次元戸田格子のある特殊解を代入することで、逆平面分割のよい母関数の具体例を求めた。このよい母関数は(1)で求めた新しい母関数を任意枠へとさらに一般化するものである。

(3) 対称平面分割のよい母関数の一般化(5. 雑誌論文②, ④)

主対角線での折返しに関して不変な(すなわち行列の意味で対称な)平面分割を「対称(symmetric)平面分割」という。対称性を課さない通常の平面分割と同様に、対称平面分割もMacMahon母関数のようなよい母関数を持っている(参考文献④)。そこで通常の平面分割に関する(1)および(2)の成果を参考にして、対称平面分割の未知のよい母関数を探索した。その結果、既存のよい母関数を拡張するようなよい母関数の予想式を得た。この母関数はパフィアンによる厳密な表示を持っている。そのため予想式の証明には、歪直交多項式などパフィアンと関連の深い直交多項式や、Pfaff格子などパフィアン解を持つ可積分系が助けになると期待される。

【参考文献】

- ③ E. R. Gansner, The Hillman-Grassl correspondence and the enumeration of reverse plane partitions, *J. Combin. Theory Ser. A* 30 (1981), 71–89.
- ④ C. Krattenthaler, Plane partitions in the work of Richard Stanley and his school, *The mathematical legacy of Richard P. Stanley*, 231–261, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 (計 5 件)

- ① 上岡 修平, 平面分割の積公式と離散二次元戸田分子, 京都大学数理解析研究所講究録2071「可積分系数理の現状と展望」(2018), 165–179.
- ② 上岡 修平, 対称平面分割の母関数のパフィアン表示, 九州大学応用力学研究所研究集会報告29AO-S7「非線形波動研究の新潮流—理論とその応用」(2018), 55–60.
- ③ Shuhei Kamioka, Multiplicative partition functions for reverse plane partitions derived from an integrable dynamical system, *Sém. Lothar. Combin.* 78B (2017), Article #29.
- ④ 上岡 修平, 森居 数広, 平面分割に関連するパフィアンについて, 九州大学応用力学研究所研究集会報告28AO-S6「非線形波動研究の深化と展開」(2017), 67–72.
- ⑤ Shuhei Kamioka, A triple product formula for plane partitions derived from biorthogonal polynomials, *DMTCS proc.* BC (2016), 671–682.

〔学会発表〕 (計 26 件)

- ⑤ 上岡 修平, 平面分割の積公式, 応用解析研究会—可積分系から計算数学まで, 2016年5月19日, 天満研修センター(大阪府大阪市)。

- ⑥ Shuhei Kamioka, Triple product formulae for boxed plane partitions derived from orthogonal polynomials, The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (JCCA) 2016, 2016年5月22日, 京都大学吉田キャンパス (京都府京都市)
- ⑦ Shuhei Kamioka, A triple product formula for plane partitions derived from biorthogonal polynomials, The 28th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC), 2016年7月8日, Simon Fraser University, Vancouver, BC, Canada.
- ⑧ 上岡 修平, 歪平面分割の積公式について, 組合せ論サマースクール2016, 2016年8月26日, 下呂市民会館 (岐阜県下呂市) .
- ⑨ 上岡 修平, 平面分割の積公式と離散二次元戸田分子, 京都大学数理解析研究所研究集会「可積分系数理の現状と展望」, 2016年9月7日, 京都大学吉田キャンパス (京都府京都市) .
- ⑩ 上岡 修平, 歪平面分割の積公式と離散二次元戸田分子, 日本数学会2016年度秋季総合分科会, 2016年9月15日, 関西大学千里山キャンパス (大阪府吹田市) .
- ⑪ 上岡 修平, 平面分割と可積分系のつながり, 第48回大域解析セミナー (熊本大学), 2016年10月17日, 熊本大学 (熊本県熊本市) .
- ⑫ Shuhei Kamioka, Plane partitions and a discrete integrable system, International Conference for the 70th Anniversary of Korean Mathematical Society, 2016年10月22日, Seoul National University, Seoul, Korea Republic.
- ⑬ 上岡 修平, 森居 数広, 平面分割に関連するパフィアンについて, 平成28年度九州大学応用力学研究所共同利用研究集会「非線形波動研究の深化と展開」, 2016年11月5日, 九州大学筑紫地区 (福岡県春日市) .
- ⑭ 上岡 修平, 離散2次元戸田分子による平面分割の和公式の導出, 第1回梅田数理科学セミナー, 2017年1月28日, 関西学院大学大阪梅田キャンパス (大阪府大阪市) .
- ⑮ 上岡 修平, 森居 数広, パフィアン表示を持つ対称な平面分割の分配関数, 日本応用数理学会第13回研究部会連合発表会, 2017年3月6日, 電気通信大学 (東京都調布市) .
- ⑯ 上岡 修平, 森居 数広, 対称平面分割に対する積型の分配関数, 日本数学会2017年度年会, 2017年3月25日, 首都大学東京南大沢キャンパス (東京都八王子市) .
- ⑰ Shuhei Kamioka, Plane partitions and the discrete 2D Toda molecule, The 10th IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory, 2017年3月30日, University of Georgia, Athens, GA, USA.
- ⑱ Shuhei Kamioka, Multiplicative partition functions for reverse plane partitions derived from an integrable dynamical system, The 29th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC), 2017年7月9日, Queen Mary University of London, London, UK.
- ⑲ 上岡 修平, 可積分系から得られる平面分割のよい分配関数, 第44回大阪組合せ論セミナー, 2017年9月2日, 大阪市立大学梅田サテライト (大阪府大阪市) .
- ⑳ 筧 三郎, 上岡 修平, 太田 泰広, Jeu de taquin と超離散戸田方程式, 日本応用数理学会2017年度年会, 2017年9月8日, 武蔵野大学有明キャンパス (東京都江東区) .
- ㉑ 上岡 修平, Partition functions for reverse plane partitions derived from the two-dimensional Toda molecule, 日本数学会2017年度秋季総合分科会 (無限可積分系特別セッション特別講演), 2017年9月11日, 山形大学小白川キャンパス (山形県山形市) .
- ㉒ 上岡 修平, 対称な逆平面分割と離散2次元戸田分子, 平成29年度九州大学応用力学研究所

共同利用研究集会「非線形波動研究の新潮流—理論とその応用」, 2017年11月11日, 九州大学筑紫地区(福岡県春日市)。

- ②③ 上岡 修平, 超離散戸田分子の解の組合せ論的な表示, 第15回計算数学研究会, 2017年12月2日, 那須オオシマフォーラム(栃木県那須町)。
- ②④ Shuhei Kamioka, Nice formulas for plane partitions from an integrable system, Algebraic and Enumerative Combinatorics in Okayama (AECO), 2018年2月20,22日, 岡山大学津島キャンパス(岡山県岡山市)。
- ②⑤ 上岡 修平, 対称平面分割の母関数の精密化, 日本数学会2018年度年会, 2018年3月19日, 東京大学駒場地区(東京都目黒区)。
- ②⑥ Shuhei Kamioka, A nice partition function for reverse plane partitions derived from a discrete integrable system, The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (JCCA) 2018, 2018年5月21日, 仙台国際センター(宮城県仙台市)。
- ②⑦ 上岡 修平, シュレーダー数の行列式とその数え上げ組合せ論への応用, 津田塾大学数学科談話会, 2018年6月29日, 津田塾大学小平キャンパス(東京都小平市)。
- ②⑧ 上岡 修平, シュレーダー行列式の満たすある公式の組合せ論的証明, 組合せ論サマースクール2018, 2018年8月11日, KKR伊豆長岡千歳荘(静岡県伊豆の国市)。
- ②⑨ Shuhei Kamioka, The discrete two-dimensional Toda equation gives nice formulae for reverse plane partitions, Symmetries and Integrability of Difference Equations (SIDE) 13, 2018年11月15日, JR博多シティ会議室(福岡県福岡市)。
- ③⑩ 上岡 修平, 差分方程式によるアステカダイヤモンド定理の証明, 日本数学会2019年度年会, 2019年3月17日, 東京工業大学大岡山キャンパス(東京都目黒区)。

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

- 出願状況(計0件)
- 取得状況(計0件)

〔その他〕

なし。

6. 研究組織

(1)研究分担者

なし。

(2)研究協力者

なし。

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。