様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月 ２６ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ０５０５９

研究課題名（和文）有理性問題とその応用

研究課題名（英文）rationality problem and its application

研究代表者
山崎　愛一（Yamasaki, Aiichi）

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：１０２８３５９０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：Peyreの方法を工夫改良して計算機で計算できる形にすることにより、|G|=3＾5,5＾5,7＾5の群に対してH_{nr}＾3(C(G),Q/Z)を具体的に計算した。|G|=3＾5 のときは H_{nr}＾3(C(G),Q/Z) が非自明になるのは isoclinism family 7 の場合だけであるが、|G|=p＾5 (p=5,7)のときは、非自明になる isoclinism family は 6,7,10 の３つもあることが分かった。ちなみにこのとき H_{nr}＾3(C(G),Q/Z)=Z/pZである。

研究成果の学術的意義や社会的意義
ネーター問題は、有限群Gが体k上の|G|変数有理関数体に変数の置換として作用するとき、その不変体k(G)はk上有理的かという問題である。
kが複素数体Cのときは、不分岐コホモロジーH_{nr}＾i(C(G),Q/Z)が非自明ならば有理性問題不成立なことが言える。不分岐ブラウアー群Br_{nr}(C(G))=H_{nr}＾2(C(G),Q/Z)は比較的簡単に計算できるが、三次不分岐コホモロジーH_{nr}＾3(C(G),Q/Z)が自明でない場合にH_{nr}＾3(C(G),Q/Z)を具体的に計算した例は知られていなかった。
これで|G|=243の場合は複素数体上のネーター問題がすべて解決した。

研究成果の概要（英文）：I computed degree three unramified cohomology group H_{nr}＾3(C(G),Q/Z) for |G|=3＾5,5＾5,7＾5 using a computer, by improving Peyre's method. For |G|=3＾5, H_{nr}＾3(C(G),Q/Z) is not 0 if and only if G belongs to isoclinism family 7.
For |G|=p＾5 (p=5,7), H_{nr}＾3(C(G),Q/Z) is not 0 if and only if G belongs to isoclinism family 6,7 or 10. In that case,H_{nr}＾3(C(G))=Z/pZ.

研究分野：代数学

キーワード：Noether問題　有理性問題　不分岐コホモロジー　Galois逆問題

1. 研究開始当初の背景

(1) Colliot-Thélène から、有理性問題には $H^i_{nr}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の計算が有効と考えられるとのアドバイスをいただいたことから始まった。$H^2_{nr}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ に関しては既に Bogomolov により計算手法が確立されているので、具体的に計算した研究は多数ある。しかし $H^3_{nr}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ が非自明なときに具体的に計算した例はまだ知られていなかった。そこで、$H^3_{nr}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ を具体的に計算しようということになった。

(2) G を有限群、M を G-lattice とする。$n = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} M$ とおく。複素数係数有理関数体 $\mathbb{C}(M) := \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ に G が乗法的に作用しているとする。$\mathbb{C}(M)$ の G による不変体を $\mathbb{C}(M)^G$ と書く。不分岐 Brauer 群 $\mathrm{Br}_u\big(\mathbb{C}(M)^G\big)$ を表す式を 1990 年に Saltman が発見した。$n \leq 3$ のときは $\mathrm{Br}_u\big(\mathbb{C}(M)^G\big) = 0$ であることが知られている。しかし $n = 4$ のときにすでに $\mathrm{Br}_u\big(\mathbb{C}(M)^G\big)$ を具体的に計算するのは簡単ではない。$\mathrm{Br}_u\big(\mathbb{C}(M)^G\big) = B_0(G) \oplus H^2_u(G, M)$ と直和分解できる。$B_0(G)$ に関しては既に多くの人により研究されている。しかし $H^2_u(G, M)$ を扱った研究はあまりなかった。そこで、まず n が小さいときに $H^2_u(G, M)$ を計算してみようということになった。

2. 研究の目的

(1) ネーター問題は、有限群 G が体 k 上の $|G|$ 変数有理関数体に変数の置換として作用するとき、その不変体 $k(G)$ は k 上有理的（すなわち純超越的）かという問題である。k が複素数体 $\mathbb{C}$ のときは、不分岐コホモロジー $H^i_{nr}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ が非自明な場合は $\mathbb{C}$ 上 $\mathbb{C}(G)$ の有理性問題が不成立なことが言える。$\mathbb{C}(G)$ の有理性問題が未解決であるような G に対し、もし $H^3_{nr}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ が具体的に計算できて 0 でないことが言えれば有理性問題不成立が言えたことになる。$H^3_{nr}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ のときは $\mathbb{C}(G)$ の有理性問題に関しては、それ以上何もいえない。有理性問題との関連では $H^3_{nr}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$ となるような G の具体例をなるべく多く見つけることに興味がある。

(2) ネーター問題の一般化として、有限群 G が体 k 上の n 変数有理関数体に忠実に作用しているとき、その不変体が k 上有理的（すなわち純超越的）かという問題が考えられる。係数体 k が複素数体 $\mathbb{C}$ で、有限群 G の n 変数有理関数体への作用が乗法的の場合を考える。

G を有限群、$\mathbb{Z}[G]$ をその群環とする。M を G-lattice、すなわち有限生成 $\mathbb{Z}[G]$ 加群で、アーベル群として $\mathbb{Z}^{\oplus n}$ と同型とする。M の $\mathbb{Z}$-基底を一つ固定して、それを $\{x_1, \ldots, x_n\}$ とおく。$\sigma \in G$ に対し、σ の M への作用の表現行列 $\Phi(\sigma)$ が定まる。$\sigma \cdot x_i = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} x_j$ のとき $\Phi(\sigma) = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ である。このとき、複素係数 n 変数有理関数体 $\mathbb{C}(M) := \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ への σ の作用を乗法的に、すなわち $\sigma \cdot x_i = \prod_{1 \leq j \leq n} x_j^{a_{ij}}$ で定義する。$\mathbb{C}(M)$ の G 不変体 $\mathbb{C}(M)^G = \{u \in \mathbb{C}(M) \,|\, すべてのσ \in G に対してσ \cdot u = u\}$ が $\mathbb{C}$ 上有理的かどうかを問題にする。$\mathbb{C}(M)^G$ が $\mathbb{C}$ 上有理的であれば $\mathrm{Br}_u\big(\mathbb{C}(M)^G\big) = 0$ であることが知られている。従って、$B_0(G)$ または $H^2_u(G, M)$ が 0 でないとき、$\mathbb{C}(M)^G$ が $\mathbb{C}$ 上有理的でないことが結論付けられる。

3. 研究の方法

(1) 2014 年頃からこの問題を考え始めたが、当時はまだ $H^3_{nr}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ を計算できるだけの計算機環境が整っていなかった。主に 2016 年と 2017 年の夏に台湾大学で、台湾大学の Kang 先生, 新潟大学の星さんと 3 人で議論して研究を進めた。一番工夫した部分は、Hochschild Serre spectral sequence を計算機上で具体的に計算できるようにした部分である。それ以外にも、計算量をなるべく減らすための理論的な工夫をした。ちょうどその頃タイミングよく、計算機ソフト GAP 上で動くパッケージ HAP が改良されたこともあり、約 3 年がかりでついに $H^3_{nr}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の計算ができるようになった。ただし確実に $H^3_{nr}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ が計算できるのは、今のところ $|G|$ が奇数のときに限る。例えば $|G|$ が偶数のときでも $G = A_6, A_7, PSL_2(\mathbb{F}_8)$ のときは計算できたが、$|G| = 2^6, 2^7$ の場合は計算できない。

(2) $H^2_u(G, M)$ は $H^2(G, M)$ の部分群で、次の式で定義される。

$$H^2_u(G, M) = \bigcap_H \mathrm{Ker}\big(\mathrm{res} : H^2(G, M) \to H^2(H, M)\big)$$

ただし H は G のすべての極大 bicyclic 部分群を動く。
計算機ソフト GAP 上で $H^2_u(G, M)$ を計算するプログラムを作成した。そのプログラムを使えば $n = 4, 5$ のときは比較的簡単に $H^2_u(G, M)$ の計算ができる。しかし $n = 6$ のときにすべての場合を計算するためには、計算量を減らすために理論的な工夫をする必要があった。また、計算機の結果をもとに一般化したものをいくつか理論的に証明した。

4. 研究成果

(1) $|G| = 3^5, 5^5, 7^5$ のときに $H^3_{nr}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ を計算した。$H^i_{nr}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は G の isoclinism family のみによって決まることが知られている。$|G| = 3^5$ の計算結果は次の表の通りである。

$\lvert G\rvert = 3^5$	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5	Φ_6	Φ_7	Φ_8	Φ_9	Φ_{10}
$H^2_{\mathrm{nr}}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	0	0	0

$|G| = 5^5, 7^5$ の計算結果は次の表の通りである。

$\lvert G\rvert = p^5\ (p = 5, 7)$	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5	Φ_6	Φ_7	Φ_8	Φ_9	Φ_{10}
$H^2_{\mathrm{nr}}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
$H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

$|G| = 3^5$ のときは、$H^3_{nr}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ が非自明になるのは isoclinism family Φ_7 のときのみであるのに対し、$|G| = 5^5, 7^5$ のときは驚くべきことに、$H^3_{nr}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ が非自明になるのは isoclinism family $\Phi_6, \Phi_7, \Phi_{10}$ の 3 つもある。p が 11 以上の素数のときも同様の結果になるだろうと予想されるが、今のところ $|G| = 11^5$ のときは計算量

が多くなりすぎて計算機で計算できそうにない。また、一般の p に対して理論的に示すこともできていない。

$|G| = 3^5$ のとき、isoclinism family $\Phi_1 \ldots \Phi_6$ と Φ_8, Φ_9 に対しては有理性問題が成立することが直接確かめられている。また、isoclinism family Φ_{10} のときは $H^2_{nr}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ より、有理性問題が成立しないことがすでに知られていた。今回の研究結果により、未解決であった isoclinism family Φ_7 の場合も有理性問題不成立であることが分かった。これにより、$|G| = 3^5$ のときは $\mathbb{C}(G)$ が $\mathbb{C}$ 上有理的になるのは isoclinism family Φ_7, Φ_{10} のとき以外であることが決定された。

$|G| = 5^5, 7^5$ のとき、isoclinism family $\Phi_1 \ldots \Phi_4$ と Φ_8, Φ_9 に対しては有理性問題が成立することが直接確かめられている。また、isoclinism family Φ_{10} のときは $H^2_{nr}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ より、有理性問題が成立しないことがすでに知られていた。今回の研究結果により、未解決であった isoclinism family Φ_6, Φ_7 の場合も有理性問題不成立であることが分かった。isoclinism family Φ_5 のときは有理性問題が成立するのではないかと予想して証明しようとしたができなかった。結局 $|G| = 5^5, 7^5$ のときは isoclinism family Φ_5 の場合だけが有理性問題が未解決のまま残った。

G が単純群のときも調べてみた。$G = A_5, PSL_2(\mathbb{F}_7)$ のときは有理性問題が成立することが知られている。$G = A_6, A_7, PSL_2(\mathbb{F}_8)$ の場合に $H^3_{nr}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ を計算してみたが、いずれも 0 であった。

有理性問題との関連では、$H^3_{nr}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ が G が奇素数べきのときには非常に有用であるのに対し、G が単純群の時には 0 になってしまって有用ではないようだ。

$|G| = 2^6, 2^7$ のときに $H^3_{nr}(\mathbb{C}(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ がどうなるかに関心が向くが、今のところうまく計算できない。

(2) 群準同型 $\Phi : G \to GL_n(\mathbb{Z})$ の像 $\Phi(G)$ は $GL_n(\mathbb{Z})$ の有限部分群になる。$\mathbb{C}(M)^G$ の有理性問題は、$GL_n(\mathbb{Z})$ の有限部分群の $GL_n(\mathbb{Z})$ 共役類ごとに定まる。$GL_n(\mathbb{Z})$ の有限部分群の $GL_n(\mathbb{Z})$ 共役類は $n = 6$ まで分類が知られている。本研究では $n \leq 6$ までの全ての場合に $H^2_u(G, M)$ を計算した。n ごとの有限部分群の $GL_n(\mathbb{Z})$ 共役類の数と、その中で $\mathrm{Br}_u\big(\mathbb{C}(M)^G\big)$ が 0 でないものの個数は次の通りである。

n	$GL_n(\mathbb{Z})$ の有限部分群の $\mathbb{Z}$-共役類の数	$\mathrm{Br}_u\big(\mathbb{C}(M)^G\big)$ が 0 でないものの個数
1	2	0
2	13	0
3	73	0
4	710	5
5	6079	46
6	85308	1073

$n \leq 5$ のときは常に $B_0(G) = 0$ となるが、$n = 6$ のときは $B_0(G) \neq 0$ となる場合が 24 個ある。そのうちの 22 個の群については $H^2_u(G, M) = 0$ である。つまり、$n = 6$ のとき $H^2_u(G, M) \neq 0$ となるのは 1051 個である。

$n=4$ のとき $H_u^2(G,M)\neq 0$ となる 5 個の群を表にすると次のようになる。

G	GAP ID	$H_u^2(G,M)$
D_4	(4,12,4,12)	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
Q_8	(4,32,1,2)	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$
QD_8	(4,32,3,2)	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$SL_2(\mathbb{F}_3)$	(4,33,3,1)	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$
$GL_2(\mathbb{F}_3)$	(4,33,6,1)	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

このうち最初の 3 つの群の結果については、一般化したものを理論的に証明することができた。D_4 に同型な群についての結果を一般化したものは次の通り。

n を自然数として $2n+2$ 次正方行列 σ,τ を次のように定義する。

$$\sigma=\left(\begin{array}{cccc|cc} & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ -1 & & & & & \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),\tau=\left(\begin{array}{cccc|cc} & & & -1 & & \\ & & \iddots & & & \\ & \iddots & & & & \\ -1 & & & & & \\ \hline & & & & 0 & -1 \\ & & & & -1 & 0 \end{array}\right)$$

このとき $G=\langle\sigma,\tau\rangle\simeq D_{4n}$ に対応する G-lattice M に対して $H_u^2(G,M)\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が成り立つ。

$n\leq 6$ のときは、$H_u^2(G,M)\neq 0$ となる G はすべて可解群で、非アーベル群である。$G\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3}$ のとき $H_u^2(G,M)\neq 0$ となるような rank 7 の M の例を 9 個、$G\simeq A_6$ のとき $H_u^2(G,M)\neq 0$ となるような rank 9 の M の例を 2 個発見した。後者の例の帰結として、あるアーベル群 N に対して $N\rtimes A_6$ は $\mathbb{C}$ 上ネーター問題不成立であることが分かる。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文]（計２件）

① A.Hoshi, A.Yamasaki: Rationality problem for algebraic tori. Memoirs of the American Mathematical Society 248 (2017), no.1176, v+215 pp.

② A.Hoshi, Ming-chang Kang, A.Yamasaki: Degree three unramified cohomology groups. Journal of Algebra Vol.458 (2016) pp.120-133

[学会発表]（計３件）

① 山崎愛一: Degree Three Unramified Cohomology Group 新潟代数セミナー（招待講演）2016 年 4 月 22 日新潟大学

② A.Yamasaki: Unramified Brauer group of multiplicative invariant fields of dimension ≤ 6 (II), NCTS Seminar on Algebra 2017 年 9 月 20 日国立台湾大学

③ A.Yamasaki: Degree Three Unramified Cohomology Groups and Noether's Problem for Groups of Order 243 International Workshop on Algebra (招待講演) 2018 年 6 月 9

日国立台湾大学
[図書](計０件)

[産業財産権]

○出願状況（計０件)

○取得状況（計０件)

[その他] ホームページ等

https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~yamasaki/
特に、本研究に関連した計算機プログラムを以下のアドレスで公開しています。興味のある方は誰でも無料でダウンロードして計算できます。
https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~yamasaki/Algorithm

6. 研究組織
(1) 研究分担者
なし
(2) 研究協力者
研究協力者氏名: 星　明考
ローマ字氏名: Hoshi Akinari

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。