

令和 2 年 6 月 22 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05063

研究課題名（和文）量子相互作用の数学解析を通じた表現論・数論の展開と深化

研究課題名（英文）Development and deepening of representation theory and number theory through mathematical analysis of quantum interactions

研究代表者

若山 正人（Wakayama, Masato）

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号：40201149

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000 円

研究成果の概要（和文）：量子ラビ模型と非対称量子ラビ模型におけるスペクトル構造を完全に記述し、退化固有値・非退化固有値の表現論的特徴付けも行った。非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数の特殊値から現れるアペリ数の類似に関する研究を行い、いくつかの顕著な合同関係式を得た他、興味深い予想も提出した。また、 $s=4$ におけるそれらの母関数の保型積分の一般化による表示も示し、関連するコホモロジー群や、Hecke作用素についても調べた。量子ラビ模型の熱核の解析的公式を得た。具体的には、近藤効果の相関関数と同様、熱核が逐次積分の無限級数で表示されるというものである。これにより分配関数、スペクトルゼータ関数の明示的解析接続公式も従う。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で扱われた量子ラビモデル及び非対称ラビモデルは、回路量子電磁力学における超伝導人工原子と電磁場の相互作用、とくに、ゲート型量子計算機の構築において不可欠なエンタングル状態実現に必要なこれまでにならぬ強結合を生む実験結果を理論的に支えるものである。本研究では、それらのモデルの退化性を含めたスペクトルの完全な記述に加えて、量子ラビモデルの熱核の解析的公式の導出という大きな成果を得た。また、非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数の特殊値の研究では、保型積分の拡張理論と関連して、近年保型表現論で注目されている概保型形式の理論に迫ることとなった。両者ともに極めて高い学術的意義を持つものと考えている。

研究成果の概要（英文）：The spectral structures in the quantum Rabi model and the asymmetric quantum Rabi model are fully described. Representation theoretical characterization of degenerate and non-degenerate eigenvalues was also obtained. We have studied the similarity of the Aperi numbers that appears from special values of the spectral zeta function of non-commutative harmonic oscillators. In addition to getting some notable congruential relations, we obtained some interesting conjectures. We also show the explicit expression of those generating functions at  $s=4$  by a generalization of the automorphic integrals. We also investigated related cohomology groups and Hecke operators. An analytical formula for the heat kernel of the quantum Rabi model was obtained. Specifically, like the Kondo effect correlation function, the heat kernel is described as an infinite series of iterative integrals. This gives also the partition function and the explicit analytic continuation of the spectral zeta function.

研究分野：代数学、理論物理

キーワード：非可換調和振動子 ホイン微分方程式 量子ラビモデル 保型積分 アペリ数 退化スペクトラム スペクトルゼータ関数の特殊値 スペクトルの熱核の解析的公式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

## 1. 研究開始当初の背景

量子ラビ・モデル(Quantum Rabi model: QRM)には、それに付随するようないわゆる生成・消滅が存在しないことから、昇降演算子を用いた表現論的扱いがなされてこなかった。また、QRM のハミルトニアンと可換な作用素は存在せず、その解析が困難なため、代替物として QRM の回転波近似である Jaynes-Cummings model (JCM) が利用されてきた。実際、JCM にはそのハミルトニアンと可換な作用素が存在するために、スペクトルの記述が容易である。ところが、JCM は、以前はそこに含まれるパラメータが小さければ実験に適合し QRM のよい近似とされてきたが、昨今の実験の進歩により、小さなパラメータに対してさえも QRM の代替役は果たせないことが判ってきた。かかる状況下、D. Braak “On the Integrability of the Rabi Model, Phys. Rev. Lett.107 (2011)” が QRM の大半のスペクトルをある意味で記述し、その完全可解性へのブレークスルーを生んだ。それ以前に知られていたのは、M.Kuš (J.Math.Phys.26, 1985) により記述された退化スペクトルのみであった。

申請者は論文 “The quantum Rabi model and Lie algebra representations of  $sl_2$ ”, M.Wakayama, T.Yamasaki, J. Phys. A: Math. Theo., 47 (2014)において、この退化スペクトルがリー環  $sl_2$  の有限次元既約表現の枠組みで捉えられることを示し、さらに、上記 Braak の論文で見落とされている可能性がある非退化固有値の存在を示唆した。実際、このことを裏付ける A.J. Maciejewski, M. Przybylska and T. Stachowiak “Full spectrum of the Rabi model, Phys.Letter A 378 (2014)” の数値シミュレーションによる研究成果も得られている。従って現在、QRM のスペクトルは、正則固有値 (Braak: 非退化である)、退化・例外型固有値 (Kuš: すべて 2 重縮退)、非退化・例外型固有値の 3 種からなると考えられている。なお、例外型固有値は  $E:=m-g^2$  ( $m$ :非負整数) なる形の固有値と特徴付けられるものである。

## 2. 研究の目的

数理論理研究者や多くの物理学者により QRM の理論研究そして実験・シミュレーションが進展しているが、スペクトルの全貌は未だ不明である。表現論による体系的な記述は、固有値分布幅に関する Braak の予想を含めて、量子光学における理論モデルの数学解析に寄与し、かつ、手法としての表現論の新しい展開を生むことである。具体的には、QRM に対して、非可換調和振動子及びそれとの関係あるいは対比によって行う数論・表現論からのアプローチと数論自体への新しい研究を行うことである。

## 3. 研究の方法

QRM の理論的研究の突破口を拓いた D.Braak (Univ. Augsburg) とその数値的・理論的研究で先導的役割を果たす E.Solano (Univ. Basque Country) のグループとの討論・情報交換、さらに非可換調和振動子に関する数論研究で共同研究を行ってきた木本一史(琉球大)との協力で研究を推進した。加えて、力学系・エルゴード理論の専門家で、非可換調和振動子のスペクトルの数論性に深い関心を抱く E.Verbitskiy (Leiden Univ.) 及び、共著者である A.Parmeggiani や一瀬孝(金沢大)らとの意見交換も行い研究を進めた。同時に、QRM のスペクトルゼータ関数の特殊値の研究の基礎になるその熱核の明示的な解析的公式の探究を Cid Reyes-Bustos (東工大) と行った。さらには、QRM を含む非対称量子ラビ・モデル (Asymmetric quantum Rabi model) のスペクトルの研究を木本及び Reyes-Bustos と頻繁な discussion を通じて進めた。加えて、申請者と黒川信重(東工大)が 2001 年より始め、2016 年には 16 回目を迎える国際ワークショップ “Zeta functions in Okinawa” では、多様な角度から種々の関数と L 関数の研究に関する意見・情報交換を行っている。参加者には、非可換調和振動子のスペクトル関数に関する進展をよく知る研究者も多く、ここでの議論は本研究計画推進に重要な役割を果たすことが期待されていたが、それを行なった。さらにまた、成果発表と海外の協力者 (E.Solano, A.Parmeggiani など) との研究連絡のため、表現論・数理論理・数論等の研究集会・国際会議に赴き講演 and/or 情報交換を行った。

## 4. 研究成果

本研究課題における研究成果は以下の通りである。

- (1) 量子ラビ模型と非対称量子ラビ模型におけるスペクトルの構造を完全に記述した。とくに、退化固有値 (Juddian eigenvalues) についての詳細な記述、さらにまた、non-Juddian および正則固有値の表現論的特徴付けを行った。これらは、木本一史(琉球大学)と Cid Reyes-Bustos との論文 “Determinant expressions of constraint polynomials and the spectrum of the asymmetric quantum Rabi model” by K. Kimoto, C. Reyes-Bustos and M. Wakayama, International Mathematics Research Notices, DOI: 10.1093/imrn/rnaa034 (1-87) にま

とめ公刊した。現在印刷中であるが On-line 出版はすでになされている。なお、本論文は、掲載決定の直前の preprint として、arXiv :1712.04152 [math.MP] (2019)で公表されている。

- (2) 非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数の特殊値の研究を行った。とくにそこに現れるアペリ数の類似に関する数論的考察を行った。アペリ数の類似が満たす顕著な合同関係式を示し、さらなる予想も提出した。また、 $s=4$ におけるそれらの母関数が、(一般化された) Eichler forms を用いて表示できることを示した。具体的には一般化された Eisenstein 級数の微分たちを用いての表示であるが、これらに加えて、関連するコホモロジー群や、Hecke 作用素についても調べた。内容は、プレプリントして以下のように公表している。“Apéry-like numbers for non-commutative harmonic oscillators and Eichler forms with the associated cohomology groups” by K. Kimoto and M. Wakayama, arXiv:1905.01775 [math.NT] (2019) [53 pages].
  
- (3) 量子ラビ模型の熱核の解析的公式を得た。物理学では長く期待されていたが、これまで求めることが困難すぎると考えられていたものである。方法は、Trotter-Katoの公式および量子フーリエ変換 ( $Z_2^{\infty}$ に関する調和解析・組合せ論)を駆使したものである。具体的には、近藤効果の相関関数と同様、熱核が逐次積分の無限級数で表示されるというものであり、この結果により分配関数、スペクトルゼータ関数の明示的解析接続公式も従う。内容は、以下のプレプリントにある。“The heat kernel and spectral zeta function for the quantum Rabi model” by C. Reyes-Bustos and M. Wakayama, arXiv:1906.09597 [math.MP] (2019) [66 pages].

上記において(2)は当初計画において期待された成果が順調に得られたものである。(1)については、当初、QRMにとどまる可能性があったが、AQRM』に対してもスペクトルの全貌が完全に記述されたという意味で、期待以上の成果である。(3)も数論にとどまらず、物理学自体への貢献に至る成果であると考えている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 M. Wakayama	4. 巻 -
2. 論文標題 Number theoretic study in quantum interactions (in PRINTING)	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Symposium on Mathematics, Quantum Theory, and Cryptography (Proc. of MQC 2019)	6. 最初と最後の頁 85-90
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-981-15-5191-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Kimoto, C. Reyes-Bustos and M. Wakayama	4. 巻 -
2. 論文標題 Determinant expressions of constraint polynomials and the spectrum of the asymmetric quantum Rabi model	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices (in PRINTING, 87 pages)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi.org/10.1093/imrn/rnaa034	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 若山正人	4. 巻 670
2. 論文標題 固有値問題の探求－様々な問題を通して見るその姿	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 サイエンス社 数理科学 No.670 量子ラビ模型の固有値問題－光子と格子をつなぐ嚆矢, 特集	6. 最初と最後の頁 56-66
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masato Wakayama	4. 巻 50
2. 論文標題 Symmetry of asymmetric quantum Rabi models	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 174001-174020
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/aa649b	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Jacques Faraut and Masato Wakayama	4. 巻 120
2. 論文標題 Hermitian symmetric spaces of tube type and multivariate Meixner-Pollaczek polynomials	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Mathematica Scandinavica	6. 最初と最後の頁 87-114
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7146/math.scand.a-25506	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Cid Reyes- Bustos and Masato Wakayama	4. 巻 -
2. 論文標題 Spectral degeneracies in the asymmetric quantum Rabi model	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Mathematical Modelling for Next-Generation Cryptography, Springer	6. 最初と最後の頁 117-137
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi.org/10.1007/978-981-10-5065-7_7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masato Wakayama	4. 巻 3
2. 論文標題 Equivalence between the eigenvalue problem of non-commutative harmonic oscillators and existence of holomorphic solutions of Heun differential equations, eigenstates degeneration and Rabi model	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 759-794
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnv145	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計22件 (うち招待講演 22件 / うち国際学会 18件)

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Spectrum of Asymmetric Quantum Rabi Model and Representation of $sl_2$ .
3. 学会等名 Faraut Festa - Conference on Harmonic Analysis and Representation Theory (COVID-19 のため中止) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Quantum Interaction Models and Number Theory
3. 学会等名 Mathematical Sciences, The University of Nottingham (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 The heat kernel and spectral zeta function for the quantum Rabi model
3. 学会等名 Zeta Functions in OKINAWA 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Number theoretic study in quantum interactions
3. 学会等名 International Symposium on Mathematics, Quantum Theory, and Cryptography (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Heat kernel of the quantum Rabi model
3. 学会等名 Applications of Nonlinear Diffusion Equations 2019 (ANDE 2019) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Mathematical problems around the quantum Rabi model
3. 学会等名 Workshop on Mathematical Developments Related to the Quantum Rabi Model in The Australian National University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Analysis of the quantum harmonic oscillator-oscillator representation of $sl(2)$ , heat kernel, Riemann zeta function, Apery numbers
3. 学会等名 Pre-colloquium lectures (for post graduate students) in University of Tuebingen (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Analysis of quantum interaction models
3. 学会等名 Colloquium in University of Tuebingen (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 非可換調和振動子と量子ラビ模型
3. 学会等名 Zeta Functions in OKINAWA 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 若山正人
2. 発表標題 光子と格子をつなぐ嚙矢- 量子相互作用の対称性【概説講演】
3. 学会等名 表現論シンポジウム2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Spectral degeneracies in asymmetric quantum Rabi models and representations
3. 学会等名 AMSI (Australian Mathematical Sciences Institute) Conference 「Integrability in Low-Dimensional Quantum Systems」(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Spectrum of the asymmetric quantum Rabi models and zeta regularized product
3. 学会等名 Zeta functions and trace formulas in Fukuoka (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Symmetry and spectral degeneracies in asymmetric quantum Rabi models
3. 学会等名 Spectral analysis of Quantum Rabi models (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2017年



1. 発表者名 若山正人
2. 発表標題 Spectral determinants of the asymmetric quantum Rabi models
3. 学会等名 Zeta Functions in Okinawa 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Symmetry of asymmetric quantum Rabi models
3. 学会等名 ポロニヤ大学数学教室特別セミナー (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 若山正人
2. 発表標題 非対称量子ラビ模型のスペクトルの level crossings と表現論
3. 学会等名 金沢大学 数理学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Representation theoretic approach to the spectrum of quantum Rabi or its generalized models
3. 学会等名 Mathematical quantum field theory and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Generalized Quantum Rabi models and Finite Dimensional Representations of $sl_2$
3. 学会等名 表現論がつなく数学2016 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Generalized quantum Rabi models and representations theory
3. 学会等名 International Workshop on Ultra-Strong Light-Matter Interactions: (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Symmetry of asymmetric quantum Rabi models
3. 学会等名 Zeta Functions in Okinawa 2016 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Spectral analysis of Quantum Rabi models
3. 学会等名 International Workshop on Ultra-Strong Light-Matter Interactions: theory and applications to quantum information (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 若山正人
2. 発表標題 量子光学モデルのスペクトル
3. 学会等名 CREST暗号数理ミニワークショップ「格子・光子と暗号」(招待講演)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

若山正人ウェブサイト <a href="http://imi.kyushu-u.ac.jp/~wakayama/index.html">http://imi.kyushu-u.ac.jp/~wakayama/index.html</a>
---

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考