

令和 2 年 6 月 24 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05064

研究課題名(和文) ガロア表現のモジュライ空間の内在的構造の研究

研究課題名(英文) Study on the internal structures of the moduli of Galois representations

研究代表者

田口 雄一郎 (Taguchi, Yuichiro)

東京工業大学・理学院・教授

研究者番号：90231399

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：高次クマー忠実体の arithmetic についての研究を推し進めた。この概念は遠アーベル幾何学に現れるクマー忠実体の variant であり、数論幾何学に於いて有用である。これまでに得られた結果を論文として纏め専門誌に投稿した。内容は主に高次クマー忠実体の分岐理論的特徴付けであり、例えば有限次代数体の、分岐が至る所有限である様なガロア拡大は高次クマー忠実である事が証明出来た。応用として例えば半アーベル多様体の制限されたタイプの等分点添加によるガロア拡大が高次クマー忠実である事が分かる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

今年4月に大ニュースになったように、長らく数論の未解決問題であった abc 予想が、望月新一氏により、彼の宇宙際タイヒミュラー理論の応用として証明された。宇宙際タイヒミュラー理論はその重要な構成要素として遠アーベル幾何学を含む。通常の遠アーベル幾何学は有限生成な体、例えば有限次代数体上で考察されることが多いが、暫く前から sub-p-adic な体上に拡張され、さらに最近ではクマー忠実体上に拡張されつつある。ところが、どんな無限次代数体がクマー忠実体であるかの判定は必ずしも容易ではない。この状況に鑑みるに、無限次代数体がクマー忠実体となるための判定条件を与えた我々の結果の意義は大きい。

研究成果の概要(英文)：We studied the arithmetic of highly Kummer-faithful fields. This notion is a variant of the notion Kummer-faithful fields, and is important in anabelian geometry. We have written a paper about our results and submitted it to a journal. Its contents are mainly about a ramification theoretic characterization of highly Kummer-faithful fields. For example, if k is an algebraic number field of finite degree, then we have proved that a Galois extension of k whose ramification is everywhere finite is highly Kummer-faithful. As an application, we obtain that the following field is highly Kummer-faithful: the field obtained by adjoining to k all the coordinates of all p

研究分野：数論

キーワード：ガロア表現 モジュライ 有限性 ヘッケ体 クマー忠実体 遠アーベル幾何学 宇宙際タイヒミュラー理論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

1. 研究開始当初の背景

本件申請時以前の研究で、かなり一般の状況設定に於いて、ガロア表現のモジュライ空間を f -profinite scheme として構成出来た。これに続いて本研究課題では、(適当な条件下での)その有限性の証明や、様々な条件に対応する locus を調べ、他の研究者達の構成している変形空間と我々のモジュライ空間との関係の解明を目指した。さらに、幾何学的ガロア表現のモジュライ空間は、適切な状況設定の下では、(profinite 環ではなく) Z 上有限型の環上定義される可能性があるが、この様な定義環の降下の研究を行い、数論的問題に応用する事を目論んだ。その一環として、ガロア表現の「Hecke 体」について以前の研究で得られていた結果をさらに発展させる事も目標とした。

ガロア表現の変形理論はフェルマーの最終定理の証明で用いられて脚光を浴びて以降、保型性持上げや $R=T$ 型定理などで大活躍して来た。この方面の大予想の一つに Fontaine-Mazur 予想がある。これは「幾何学的(最近は「代数的」とも言われる)ガロア表現は代数幾何から来るであろう」という主予想と、それから派生する幾つかの予想の束であるが、応募者はそのうちの「有限性予想」の三つの版(a),(b),(c)の関心に興味を持った。また、それ以前から応募者は、Fontaine-Mazur の有限性予想の mod p 版とも考えられる、Khare-Moon の有限性予想について研究し、幾つかの成果を挙げていた。さて、Fontaine-Mazur の有限性予想の三つの版のうち(b)と(c)とは同値であり、(a)はそれらより真に強い。その「差」を埋めるのが Khare-Moon の(剰余表現についての)有限性予想である事が推測され、これを厳密に証明するには Mazur の変形理論では不十分である事が実感されたので、ガロア表現のモジュライ理論を建設した。その結果、当初の問題の一つであった、上記の「関係」は証明され、さらに幾つかの応用が与えられた。と同時に、新たな問題も発見された。その様な問題のうち主なものとして、「モジュライの有限性」「条件付きモジュライ空間、及び他の変形空間との関係」「モジュライ空間の定義環の降下」がある。本研究課題ではこれらの問題に取り組んだ。

2. 研究の目的

以下の問題の解決を目的とした。

問題 1. モジュライの有限性. 表現するガロア群(又は、より一般に f -profinite 環)が位相的に有限生成ならば、その(次数を固定した)絶対既約表現のモジュライ空間も有限型である事は論文[1]で証明された。しかし、ガロア群が位相的に有限生成と判明していない場合でも、モジュライ空間が有限型になるのではないかと期待される場合があり、もしこれが証明出来れば大変興味深い結果となる。その様な場合の典型例として、大域体 K の、有限個の素点の集合 S の外で不分岐な最大ガロア拡大のガロア群 $G(K,S)$ の表現がある。 $G(K,S)$ 自体は有限生成かどうか知られていないが、有限個の共役類で生成される事は知られているので、絶対既約表現のモジュライ空間が有限型になってもおかしくないと期待されるのである。そこで、より一般に、 f -profinite な環が有限個の共役類で生成されるとき、適当な条件の下(或いは全く一般に)、その絶対既約表現のモジュライ空間が有限型になる事を証明したい。

問題 2. 条件付きモジュライ空間、及び他の変形空間との関係. 論文 "Moduli of Galois representations" で構成したモジュライ空間は(絶対既約という以外は)何も条件を付けない表現のモジュライであるが、数論への応用に於いては様々な条件(「幾何学的」とか「 p で potentially crystalline」とか)を課す必要に迫られる事がある。実際 Mazur 流の変形理論に於いてはこの様な条件を課した様々な変形空間が考察され、またこれらの変形空間はリジッド解析空間としても考察されて、ガロア表現の保型性の研究などで効果的に利用されている。その様な変形空間(や、それから派生した空間)としては、例えば Eigencurve やその高次元化である Eigenvariety、さらに Bellaïche-Chenevier の構成したガロア表現の解析的族等がある。それらは我々の構成したモジュライ空間とも関係が付く筈であるが、こちら側は構成が代数的で汎用性がある半面、条件付きのモジュライ空間やリジッド解析的な考察等の点で整備が遅れている。そこで、我々のモジュライ理論を様々な条件下で展開し、解析的考察も加えて、他の理論と比較可能な程度に整備したい。例えば、代数体のガロア群の幾何学的な表現のモジュライを構成し、その幾何的性質を調べ、さらにそれに付随する(適当な意味の)解析的空間を調べ、これを使って Bellaïche-Chenevier の族をパラメトライズ出来るかを調べたい。

問題 3. モジュライ空間の定義環の降下. この定義環の降下は、例えば(理想的な状況下では)アприオリには Z の profinite 完備化上定義されるモジュライスキームが実は Z 上定義されたものから来ている、という事を示す、という問題である。群や環の絶対既約表現は「トレースの環」上定義される事が色々な場合に個別的に知られていたが、この現象は f -profinite 環の表現でも成り立つ。群や環が f -profinite ならば、モジュライ空間の定義環も f -profinite になつて然るべきだが、時にはもっと小さく取れる事が期待される場合もある。例えば、代数体の

絶対ガロア群の(有限個の素点の外で不分岐な)表現の場合、その表現は各素点におけるフロベニウスのトレースで決まり、しかも幾何学的な表現ならばその値は有理数(重さ 0 ならば整数)であるから、何らかの意味で定義環が \mathbb{Z} まで降下すると期待する事は自然である。現在の所、この問題をどう定式化すべきか、明確な所は分かっていない。きちんとした定式化を与える事が第一の目標である。その手掛かりを得るため、ガロア表現の定義体について様々な角度から研究を行って行く。例えば研究協力者 D. Choi 氏との共著論文はその様な文脈で書かれた。まづはこの論文の内容を発展させたい。例えば、ガロア表現の族に対し、この論文で言うところの「Hecke 体」がモジュライの定義体に取れる事が期待されるが、それが成り立つならば証明し、成り立たないならば何がその障害になるのかを究明したい。

3. 研究の方法

上の諸問題について、着手し易い順(問題3 問題2 問題1)に、先づは研究代表者が独力で、次いで、大学における普通のセミナーに於いて、連携研究者及び研究協力者の助力を仰ぎつつ、研究を進める。そのため、連携研究者/研究協力者を適宜招聘または訪問して研究打合せを行う。また、各年度ごとに関連分野の研究者を集めて小研究集会を開催する。さらに、関係する他の研究者の研究成果を取り入れるため、国内外の主要な研究集会等に参加して情報収集する。

本研究の後半では小関祥康氏との共同研究がメインになったため、小関氏に東工大に来て頂き、議論を重ねた。また、クムマー忠実については、この概念を定義した望月新一氏や、クムマー忠実体上の遠アーベル幾何学の研究に於いて大きな成果を挙げている星裕一郎氏に助言を求めるとして視野を広げた。

4. 研究成果

問題3では「Hecke 体」とガロア表現のモジュライの定義体との関係を問題にしたが、これは(或る程度想定していたが)かなり困難な問題であり、少し視点を変えて、考えるガロア群として、特殊な体のガロア群を取ってみることを考えた。折しも遠アーベル幾何学では「クムマー忠実体」という特別なタイプの代数体が最近注目を浴びて来ている。これは、「クムマー理論が遠アーベル幾何学的復元作業に於いて有効に働く様な体」であって、遠アーベル幾何学、ひいては宇宙際タイヒミュラー理論に於いて重要な概念である。我々の一般的な研究目的である「どこにどの様なガロア表現がどの様に存在するか」という観点に照らし、先ずはクムマー忠実体の特徴づけを目指した。

小関祥康氏と共同で、より一般に、「高次クムマー忠実」な体の arithmetic についての研究を推し進めた。この概念は遠アーベル幾何学に現れるクムマー忠実体の variant であり、数論幾何学に於いて有用なものと思われる。これまでに得られた結果を論文として纏め、現在 arXiv に投稿した段階であり、近々専門誌に投稿する予定である。内容は主に高次クムマー忠実体の分岐理論の特徴付けであり、例えば k を有限次代数体とするとき、分岐が至る所有有限である様な k のガロア拡大は高次クムマー忠実である事が証明出来た。応用として、例えば k 上の半アーベル多様体 A と自然数 n を固定し、素数 p を動かすとき、 A の p^n 等分点の座標を全て k に添加して得られる拡大体は高次クムマー忠実である事が分かる。また、「高次クムマー忠実」「クムマー忠実」「sub- p -adic」という三つの概念の間関係も明らかにした。この研究に於いて明らかとなった興味深い事実の一つに次がある：

有限次代数体 k の(無限次でもよい)ガロア拡大 K について、 K に含まれる k の任意の有限次拡大 k' に対し、 K/k' の最大アーベル部分拡大の分岐指数が有限ならば K は高次クムマー忠実である。この結果は高次クムマー忠実体が類体論と深い親和性を有している事を示唆している様に思われてならない。その他、興味深い結果としては、有限次代数体の類体塔なども高次クムマー忠実である事が分かった。

上では半アーベル多様体の等分点添加による拡大で高次クムマー忠実になるものを構成したが、実はこれは一般化が可能である。例えば、 k 上の代数多様体 X に対しその $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ 係数のエタールコホモロジー群 H^i を考え、そのガロア作用の分解体を考える。この時、ベッチ数がある限界内 b に留まる様に X を動かす(次元も動いてよい) また p^n も動かして(p 毎に n が違ってよい) それらに対応する分解体たちの合成体を見ると、これもまた高次クムマー忠実となる。応用として、保型形式に伴うガロア表現について、同様に構成した体なども高次クムマー忠実となる。この様に、かなり広範な代数体が高次クムマー忠実となる事が示された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件／うち国際共著 1件／うちオープンアクセス 0件）

| | |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名 Nobushige Kurokawa and Yuichiro Taguchi | 4. 巻 94 |
| 2. 論文標題 A p -analogue of Euler's constant and congruence zeta functions | 5. 発行年 2018年 |
| 3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy | 6. 最初と最後の頁 13 - 16 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3792/pjaa.94.13 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Taguchi Yuichiro | 4. 巻 53 |
| 2. 論文標題 Moduli of Galois Representations | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences | 6. 最初と最後の頁 457 ~ 516 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/PRIMS/53-4-1 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Kurokawa Nobushige, Taguchi Yuichiro | 4. 巻 94 |
| 2. 論文標題 A p -analogue of Euler's constant and congruence zeta functions | 5. 発行年 2018年 |
| 3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences | 6. 最初と最後の頁 13 ~ 16 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3792/pjaa.94.13 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Yuichiro Taguchi and Dohoon Choi | 4. 巻 48 |
| 2. 論文標題 On the Hecke fields of Galois representations | 5. 発行年 2016年 |
| 3. 雑誌名 Bulletin of the London Mathematical Society | 6. 最初と最後の頁 813--821 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1112/blms/bdw042 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 0件）

| |
|--|
| 1. 発表者名 田口雄一郎 |
| 2. 発表標題 ほどほどに大きい代数体上の Mordell-Weil群 |
| 3. 学会等名 愛媛大学 代数セミナー（招待講演） |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Yuichiro Taguchi |
| 2. 発表標題 Mordell-Weil groups and Kummer-faithful fields |
| 3. 学会等名 Number Theory and Related Topics in Busan |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Yuichiro Taguchi |
| 2. 発表標題 On the moduli of Galois representations |
| 3. 学会等名 Master Lectures --- the Legacy of Carl Friedrich Gauss |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Yuichiro Taguchi |
| 2. 発表標題 Mordell-Weil groups over moderately large number fields |
| 3. 学会等名 KAIST Colloquium |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 田口雄一郎 |
| 2. 発表標題 Galois 表現の族の Frobenius 跡の可除性について |
| 3. 学会等名 研究集会「表現論とシユールア函数」(招待講演) |
| 4. 発表年 2016年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 田口雄一郎 |
| 2. 発表標題 Boston の問と野村氏の答、及びその周辺 |
| 3. 学会等名 北陸数論研究集会 2016「中心拡大と埋め込み問題」(招待講演) |
| 4. 発表年 2016年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

| |
|---|
| <p>TAGUCHI, Yuichiro http://www.math.titech.ac.jp/~taguchi/</p> |
|---|

| | | |
|---------------------------|-----------------------|----|
| 6. 研究組織 | | |
| 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |