

令和 2 年 6 月 14 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05068

研究課題名(和文) 平面分割・タイリングの数の上げと対称関数・パフィアン・行列式の研究

研究課題名(英文) The study of plane partitions, enumeration of tilings, symmetric functions, Pfaffians and determinants

研究代表者

石川 雅雄 (Ishikawa, Masao)

岡山大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：40243373

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：この期間の研究における主な研究成果はパフィアンの評価とセルバーグ積分の関係についてと、その後の発展であった。セルバーグ積分は有名な積分であるが、その q -analogue も Askey によって予想され Kadell と Habsieger によって別々に証明された。我々の研究の中で、あるタイプの hyperpfaffian の評価とセルバーグ積分の関係及び q -analogue との関係が明らかになった。また、これとは別に Striker-Williams のようにいろいろな対称性を持った交代符号行列の分配束としての構造の研究も行っている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

セルバーグの積分公式(1944)は、多くの研究者の興味を引いてきたが、青本先生による拡張(1987)も有名である。この研究では、これらの公式の応用としてパフィアンや hyperpfaffian の評価を行う。これは、直交多項式や対称関数と大きな関係があり、さらなる研究の発展も期待される。多くの組合せ論的数やその q -類似は直交多項式やそのモーメントと関係があるものが多く、1変数や多変数の直交多項式の研究との関係も注目される。数学の研究であるから、社会的意義の議論をする立場にはないが、代数的組合せ論にとどまらず、数学の多くの分野との関係した研究である。

研究成果の概要(英文)：The main result of our study in this period is the relation between the famous Selberg integral and the evaluation of Pfaffians. The q -analogue of the Selberg integral is conjectured by Richard Askey and proven by K. Kadell and L. Habsieger, independently. In our study we reduce the evaluation of certain hyperpfaffians to the Selberg type integrals and their q -analogues. In this study we exploit the minor summation formula for hyperpfaffians in the most general form, then find the de Bruijn formula for hyperpfaffians. This enable us to find many forms of applications for evaluations of hyperpfaffians, and we use the Vandermonde determinant to evaluate certain hyperpfaffians. We find several applications of the formula to several combinatorial numbers, the moments of the orthogonal polynomials and their q -analogues. We also study the finite distributive lattice structure of the set of half-turn symmetric alternating sign matrices and its relation to the type B positive root poset.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：Selberg integral hyperpfaffian q -analogue 直交多項式 超幾何級数 Macdonald polynomials De Bruijn's formula Aomoto's formula

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究の目的は、主に2つあった。1つは交代符号行列式・平面分割の数え上げ問題、及び平面分割と同じような手法で研究されるタイリングやパーフェクトマッチングの数え上げ問題である。もう1つは、Southampton 大学名誉教授の Ron King 氏や名古屋大学の岡田聡一教授による、行や列を制限した Schur 関数やその他の対称関数の和と群の指標の関係を調べることであった。またパフィアンや行列式の過去に研究された式の拡張が得られているが、それらの等式について bijective proof や involution 等の Stanley 的な組合せ論的手法による証明という問題があった。これらの等式についての組合せ論的証明によって、さらに新しい等式や拡張を得ることが目標であった。また、以前より研究してきた岡田氏により提唱された d-complete posets の (q,t) -hook formula についても Birds や Banners 以外の d-complete posets について Macdonald 多項式の関連性等を使って研究することが目標だった。d-complete posets については以前より和歌山大学の田川裕之教授と leaf posets への拡張や、また、North Carolina 大学の Robert A. Proctor 教授と Numbers Game を使った特徴付けを研究していた。

2. 研究の目的

また、Lyon 大学の Theresia Eisenkolbl 准教授、Jiang Zeng 教授と書いた論文は、実は本質的な q -analogue を与えるものではなく、以前から知られた Desnanot-Jacobi 等式と同値であることがわかった。しかし、それでも Desnanot-Jacobi 等式の involution を使った新しい組合せ論的証明を与えるものであり、同値性を発見した韓国の成均館大学の Jang Soo Kim 准教授と他のパフィアンの等式の involution を使った組合せ論的証明について共同研究した。その他にパフィアン・行列式について、Sundquist が与えたような involution を使った組合せ論的証明について、Eisenkolbl 准教授や Zeng 教授と議論していた。その他にも、最近、本学を訪れた台湾国立師範大学数学科の Sen-Peng Eu 教授と一緒に、King 名誉教授や岡田教授が群の指標公式やパフィアン・行列式を使った研究で得られた行や列を制限した Schur 関数の Cauchy formula や Littlewood formula について、純粋に組合せ論的な証明を試みていた。例えば Littlewood の公式については、self-dual な tableau と行の長さを制限した shape を持つ tableau の組から片方を tableau word にして Robinson-Schensted-Knuth 対応で insert すると、符号を含めてその重みが消しあうような involution が校正できるはずであるという観察を得た。しかし、一般的な involution の定義といろいろなタイプの Cauchy formula や Littlewood formula について、その組合せ論的な証明を引き続き共同研究することになっていた。もう1つの研究テーマは、昨年より東北大学の中野史彦教授、津田塾大学の貞廣泰造教授と Defect をもつアステカ長方形や六角形の rhombus tiling や domino tiling について研究してきた。そして、最初は Helfgott-Gessel の Enumeration of Tilings of Diamonds and Hexagons, Electron. J. Combin. 6, #N16. (1999) を読みながら Kasteleyn 行列やパフィアンを使って、いろいろな格子模型の tiling の個数を数えてみた。そのうち、一般のアステカ長方形において、偶数個の1列の穴を空けた場合に、その domino tiling の個数が有名なアステカ・ダイヤモンド定理と良く似た形になることを見つけた。さらに良く調べてみると、アステカ・ダイヤモンド定理と同じ2の冪乗と非常にきれいな一次式のファクターと、穴の位置を表す座標の多項式に分解し、その多項式はガウス超幾何関数を成分とする行列式で、具体的に書く予想ができた。tiling の個数は Gessel-Viennot の lattice path method を使って行列式になり、その行列式は Schroder path の個数を成分にする。この行列式を京都大学情報学科の上岡修平氏の手法を用いて Desnanot-Jacobi 公式に帰着させようとしているが、まだ完全に解決できないでいる。これまでに得られた結果は研究業績 2. で発表し、最後の行列式の評価が出来たら論文にまとめる予定であった。この行列式は、やはり超幾何関数や bi-orthogonal polynomials と深い関係があると推測される。これ以外にも、いろいろな形の穴あき格子模型の対称性を考慮した tiling 問題等も Kasteleyn 行列やパフィアンを使って、数え上げた実験があり、引き続き研究したいと考えている。Hexagon の rhombus tiling と平面分割とは密接な関係があり、これまで研究してきた手法の応用や平面分割の数え上げの手法に役立つと考えられる。最後に以前からの研究テーマであるが、引き続き、名古屋大学の岡田氏の提唱した d-complete posets の (q,t) -hook formula の予想の証明に取り組もうとしていた。d-complete posets は R. Proctor 氏によって15種類の既約な類に分類され、それらの既約な類の posets の slant-sum で書ける。岡田氏の (q,t) -hook formula については、普通の shape と shifted shape の場合には岡田氏が証明したが、Birds と呼ばれる既約な類の場合は、予想式の重み関数を Macdonald 多項式の Pieri 係数を使って記述し、証明するべき式を q -超幾何級数の等式に直して very-well-poised series に関する Gasper の公式を使って私が証明した。他の既約な類に対しても、同様に重み関数を Macdonald 多項式の Pieri 係数を使って記述できそうなことが観察できるがこれらの等式の証明や洞察にも取り組むことが目標であった。この他にも d-complete posets やその拡張である leaf posets の hook formula については Hilman-Grassl 対応の具体的な記述や Numbers Game など未解明なものも多く、この研究の中で取り組むことも多い。

3. 研究の方法

平成28年10月に Lyon 大学の Jouhet 准教授が私を訪れ、対称関数や平面分割の数え上げ問題の共同研究をするように、現在 CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique) に研

究費を申請中である。また、平成 28 年 10 月に The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications が京都で開催され、MIT の Stanley 教授が invited speaker として訪日予定である。その際に、内外の代数的組合せ論の研究者が多く集まるので、情報交換を行いたい。数学的には、中野教授や貞廣教授と始めたタイリングの数え上げの研究を対称性を考慮した問題まで広げたい。もともと Aztec Diamond の数え上げは、交代符号行列の 2-enumeration と関係がある。したがって、Aztec Diamond の対称性を考慮したドミノタイリングの数え上げは対称性のある交代符号行列の 2-enumeration と関連している。この問題は、最初に Elkies-Kuperberg-Larsen-Propp, "Alternating-Sign Matrices and Domino Tilings", J. Algebraic Combin. 1 (1992), 111-132, 219-234 で研究されたときから交代符号行列や Monotone Triangle の数え上げ、表現論と密接な関連があった。しかし Aztec Rectangle に穴を空けた領域の domino tiling の数え上げは、Aztec Diamond と違って height function が定義できないので交代符号行列の組が定義できない。well-defined な height function を見つけるのは難しそうであるが、穴のある長方形領域の対称性のある domino tiling を Kasteleyn 行列を使って数えてみると、非常にきれいな形をしている場合があることが観察される。これらが超幾何級数を使って比較的簡単な形に書き表されれば、数え上げ組合せ論の非常に面白い問題であると思われる。また、平面分割・符号交代行列の数え上げ問題として、CSTCPP (Cyclically Symmetric Transpose-Complement Plane Partitions) の数え上げ問題を引き続き研究をする。この平面分割は、同じ shape を持つ column-strict な平面分割の組で表わされ、ある重みを考えて、母関数を行列式で与えることができる。これと同じ個数を持つ FPL の集合として境界に 1 つの defect を持つ $n \times (2n + 1)$ の格子上の FPL が挙げられる。この FPL は、これまで Izergin-Korepin 行列式のような母関数を計算する方法が見つかっていなかった。また最終的には古典群の指標で結果が与えられることが期待される。CSTCPP の個数については既に解決済みであるが、FPL の特徴からくる重みを与えた数え上げを考察した人はいない。その他にも未だに未解決になっている行列式・パフィアンの評価と全単射の構成について尽力したい。これらは変数の入った行列式・パフィアンであり、その予想はシューア関数で記述される。しかし、行列式・パフィアンの評価について一般的な手法はなく、対称関数の理論や超幾何関数が関連している場合が多い。一方で最近の私と共同研究者とのハンケル行列や Hankel Pfaffian についての研究では、いろいろな形の積公式が得られた。また、その過程で q -超幾何関数や直交多項式が有用であり、その手法を開発した。これらのハンケル行列式や Hankel Pfaffian と交代符号行列・平面分割の数え上げ問題に現れる行列式・パフィアンの間の関係は未解明である。Gessel-Xin 等の論文で変数が入っていない場合には、超幾何関数を介してハンケル行列式に関連付けられたが、変数が入っている場合やパフィアンの場合にこの方法はうまく行かない。予想はシューア多項式で記述されるので、超幾何関数だけではうまく行かないと思われるが、これらの関係を解明したい。

2017 年には、形式的冪級数と代数的組合せ論に関する第 29 回国際研究集会がロンドンで開催されることが決まっている。その他にも Seminaire Lotharingien de Combinatoire やその他の国際学会に積極的に参加し、新しい研究の流れを把握すると共に、研究成果を発表していきたい。

4. 研究成果

2016 年 5 月に京都大学で The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (JCCA 2016) が開催され Richard Stanley や多くの研究者が集った。7 月にはカナダのバンクーバーの Simon Fraser University で開催された第 28 回形式的冪級数と代数的組合せ論に関する国際会議へ参加した。8 月に稚内でのワークショップに参加し、9 月には英国の Ron King 教授を訪問し研究打ち合わせを行った。その後 9 月 10-14 日にオーストリアの Strobl で開催された 77th Seminaire Lotharingien de Combinatoire に参加した。その次に、フランスのリヨン大学を訪問し Jiang Zeng 氏と共同研究を行った。また 9 月 20 日にはリヨン大学において Domino tilings of Aztec rectangles with holes and the Gauss hypergeometric series という講演を行った。また、Theresia Eisenkoelbl 氏とも共同研究を行った。10 月には山田裕史教授が京都大学数理解析研究所で主催した「リー型の組合せ論」という研究集会に参加した。また 2020 年 11 月 29 日から 12 月 2 日までオキナワグランメールリゾートで開催された表現論シンポジウムの主催者だった。2017 年 3 月には再びフランスのリヨン大学を訪問し Jiang Zeng 氏と引き続き共同研究を行った。その帰りにフランス、アルザスで開催された 78th Séminaire Lotharingien de combinatoire に参加した。この回は Thibon Festa でたいへん有意義だった。また Zhicong LIN 氏とも研究交流を行い、現在まで続いている。2017 年 5 月末から 6 月初めにかけてリヨン大学の Frederic Jouhet が岡山大学を訪れ、シューア関数とマクドナルド多項式に関する共同研究を行った。また Jouhet 氏は岡山大学において "Enumeration of fully commutative elements in classical Coxeter groups" というタイトルの談話会を行った。6 月末には Richard Stanley が岡山大学を訪れ "Smith normal form in combinatorics" というタイトルの講演を行い、たいへん興味深かった。7 月初めにロンドンの Queen Mary University of London で第 29 回形式的冪級数と代数的組合せ論に関する国際会議が開催され参加した。9 月にリヨン大学の Jiang Zeng 氏を訪ね、共同研究を続けると共にイタリアの bertinoro で開催された 79th Seminaire Lotharingien de Combinatoire に参

加した。2017年10月には京都大学で開催された2017年度RIMS研究集会「表現論と組合せ論」に参加した。また、その後、フランスのストラスブール大学の Guoni Han (Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Strasbourg et CNRS, France) 氏が岡山大学を訪問し、"Integer partitions and hook length formulas" という講演を行った。2018年の2月には岡山大学で Algebraic and Enumerative Combinatorics in Okayama という研究集会を主催し、海外からの5人の講演者に講演を行ってもらった。3月には熊本大学で『広島・岡山代数学セミナー in 熊本』が開催された。2018年6月には京都大学で開催されたRIMS共同研究(公開型)「表現論と代数、解析、幾何をめぐる諸問題」に参加した。2018年10月には京都大学で開催されたRIMS共同研究(公開型)「組合せ論的表現論の諸相」に参加し、『ある平面分割の母関数について』という講演を行った。2019年1月始めには信州大学の沼田泰英氏により開催された「Workshop on Algebraic and Enumerative Combinatorics」という研究集会に参加した。また1月末には千葉大学の萩原学氏が岡山大学を訪問し、また『A, B, D型のWeyl群による削除の拡張と完全符号』というタイトルの講演を行った。2月には東北大学情報科学研究科で開催された Representations and Combinatorial Games という研究集会に参加し、Proctor氏と研究打ち合わせを行った。また2018年3月末にはアメリカ合衆国コネチカット大学の Tom Roby 氏が岡山大学を訪問し、2つの講演を行った。1つは『Dynamical Algebraic Combinatorics and the Homomesy Phenomenon: Toggling, whirling, and Bulgarian solitaire』というタイトルで、もう1つは『Paths to Understanding Rowmotion on a Product of Two Chains』というタイトルであった。2018年度は学科長であったために忙しくて思うように研究がが進まなかった。2019年9月にフランスのリヨン大学の Jiang Zeng 氏と Theresia Eisenkolbl 氏を訪問し共同研究を行った。またリヨン大学で "Distributive Lattice of Half-Turn Symmetric Alternating Sign Matrices" という講演を行った。また10月初めには京都大学数理解析研究所で開催された『準周期タイリングとその周辺』という研究集会で "Symmetries of Domino Tilings of Aztec diamonds" という講演を行い、10月末には、京都大学数理解析研究所で『表現論とその組合せ論的側面』という研究集会を主催し、"180度回転不変な交代符号行列のなす分配束の構造" という講演を行った。2019年11月にはリヨン大学の Jiang Zeng 氏が岡山大学に3週間滞在し、Hankel Pfaffian と Selberg 積分の論文のリバイズを行った。

2018年の2月に岡山大学で開催された Algebraic and Enumerative Combinatorics in Okayama では、何人かの海外の研究者を招待し、特に関係の深い研究は非常に刺激になった。その後、いくつかの Maple program を作成し、Kuperberg の数えた対称性のある全ての交代符号行列について発生させることができ、コンピュータ実験が用意になった。2018年は母関数を考察しようし、いくつかの新しい statistics を試して母関数を計算したが、それに対応する Six vertex model の考案は難しい問題だった。その後、大学院生が Striker-Williams の論文やそれに関係した論文を読むようになり、有限分配束としての構造と対称性を考えた交代符号行列の関係を考察した。この研究は現在でも継続中であり、さらに進化して対称性のある場合の Razumov-Stroganov 予想へ挑戦しようとしている。また、Jiang Zeng 氏との共同研究である Hankel 型の Pfaffian と Selberg integral の関係に関する研究も進展し、hyperpfaffian に拡張した。少し難解ではあるが現在論文を執筆中で完成は近い。また、この研究は現在、Theresia Eisenkolbl も加わって Gessel-Xin タイプのモーメントに対するハンケルパフィアンの研究が進展している。これは Ismail-Mason によって考察された Jacobi polynomial の associated version が関係している。この問題は、まだ研究中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 石川 雅雄	4. 巻 2127
2. 論文標題 ある平面分割の母関数について	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 105-115
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Takahiro Hayata and Masao Ishikawa	4. 巻 60
2. 論文標題 A binomial-coefficient identity arising from the middle discrete series of $SU(2,2)$	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Math. J. Okayama Univ.	6. 最初と最後の頁 221-231
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Ishikawa Masao, Mano Toshiyuki, Tsuda Teruhisa	4. 巻 363
2. 論文標題 Determinant Structure for η -Function of Holonomic Deformation of Linear Differential Equations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1081~1101
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-018-3256-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 石川 雅雄, 中野, 史彦, 貞廣, 泰造, 田川, 裕之	4. 巻 1992
2. 論文標題 Domino tilings of Aztec rectangles with connected holes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 114-125
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Masao Ishikawa, Fumihiko Nakano, Taizo Sadahiro and Hiroyuki Tagawa	4. 巻 1992
2. 論文標題 Domino tilings of Aztec rectangles with connected holes	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 114-125
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 石川雅雄
2. 発表標題 Distributive lattice of half-turn symmetric alternating sign matrices
3. 学会等名 表現論とその組合せ論的側面⾯
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石川雅雄
2. 発表標題 Symmetries of Domino Tilings of Aztec diamonds
3. 学会等名 準周期タイリングとその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masao Ishikawa
2. 発表標題 Distributive Lattice of Half-Turn Symmetric Alternating Sign Matrices
3. 学会等名 Seminaire de Combinatoire et Theorie des Nombres (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石川雅雄
2. 発表標題 ある平面分割の母関数について
3. 学会等名 2018 年度 RIMS 共同研究 (公開型) 「組合せ論的表現論の諸相」
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 石川雅雄
2. 発表標題 (q, t)-hook formula for Tailed Insets and a Macdonald polynomial identity
3. 学会等名 Algebraic and Enumerative Combinatorics in Okayama (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masao Ishikawa
2. 発表標題 Leaf poset and multi-colored hook length property
3. 学会等名 Seminaire de Combinatoire et Theorie des Nombres
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Masao Ishikawa
2. 発表標題 The domino tilings of Aztec rectangles with holes and the Gauss hypergeometric series
3. 学会等名 Seminaire de Combinatoire et Theorie des Nombres (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Masao Ishikawa's Homepage
<http://www.math.okayama-u.ac.jp/~mi/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	岡田 聡一 (Okada Soichi) (20224016)	名古屋大学・多元数理科学研究科・教授 (13901)	