

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 10 日現在

機関番号：32601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2022

課題番号：16K05070

研究課題名(和文) 多重旗多様体と exotic 冪零多様体

研究課題名(英文) Multiple flag varieties and exotic nilpotent varieties

研究代表者

西山 享 (Nishiyama, Kyo)

青山学院大学・理工学部・教授

研究者番号：70183085

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：旗多様体は簡約リー群の作用するコンパクトな等質空間であって、リー群の表現論を始め、幾何学や代数学の理論に対しても幅広い舞台を提供している。本研究では旗多様体の直積(二重旗多様体)を考えて、対称部分群の作用を研究した。対称部分群の軌道が有限個であるような二重旗多様体は有限型と呼ばれる。有限型の二重旗多様体上の軌道にまつわる組合せ論やヘッケ環の表現、モーメント写像を用いた冪零多様体への写像、そしてスタインバーグ写像と呼ばれる二重旗多様体上の軌道と冪零軌道の対応、その組合せ論的記述であるRSK対応など様々な成果が本研究で得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

旗多様体は簡約リー群の作用するコンパクトな等質空間であって、リー群の表現論を始め、幾何学や代数学の理論に対しても幅広い舞台を提供している。本研究では旗多様体の直積(二重旗多様体)を考えて、対称部分群の作用を研究した。対称部分群の軌道が有限個であるような二重旗多様体は有限型と呼ばれる。有限型の二重旗多様体上の軌道にまつわる組合せ論やヘッケ環の表現、モーメント写像を用いた冪零多様体への写像、そしてスタインバーグ写像と呼ばれる二重旗多様体上の軌道と冪零軌道の対応、その組合せ論的記述であるRSK対応など様々な成果が本研究で得られた。

研究成果の概要(英文)：Flag varieties are compact homogeneous spaces acted upon by a reductive Lie group, providing a broad field not only for the representation theory of Lie groups but also for the theories of geometry and algebra. In this research, we considered the product of flag varieties (double flag varieties) and studied the action of symmetric subgroups. Double flag varieties for which the orbits of symmetric subgroups are finite are called finite type. Various results were obtained in this research, including combinatorial aspects related to orbits on finite-type double flag varieties, representations of Hecke algebras, mappings to nilpotent varieties using moment maps, and the correspondence between orbits on double flag varieties and nilpotent orbits, known as the Steinberg correspondence, which is described combinatorially using a generalization of the RSK correspondence.

研究分野：表現論

キーワード：旗多様体 (Flag varieties) 二重旗多様体 対称部分群 組合せ論 (Combinatorics) スタインバーグ写像 ヘッケ環 (Hecke algebras) 冪零多様体 RSK対応

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究の主要な研究対象は、簡約代数群 G の旗多様体の直積である多重旗多様体

$$X_{P_1, \dots, P_k} := G/P_1 \times G/P_2 \times \cdots \times G/P_k \quad (P_k \text{ は } G \text{ の放物型部分群})$$

や対称空間に付随した二重旗多様体

$$\mathfrak{X}_{P,Q} := G/P \times K/Q \quad (Q \text{ は } K \text{ の放物型部分群})$$

である。ただし K は G の対称部分群を表す。

多重旗多様体 X_{P_1, \dots, P_k} には G の対角的作用を、二重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P,Q}$ には K の作用を考える。三重旗多様体 X_{P_1, P_2, P_3} は対称対 $(G \times G, \Delta G)$ の二重旗多様体と考えられるので、両者区別せずに多重旗多様体ということにする。

多重旗多様体上の軌道の有限性や幾何的性質については 2000 年前後に Magyar-Weymann-Zelevinski により、古典群 G に対して X_{P_1, \dots, P_k} が有限個の軌道を持つのは $k \leq 3$ の場合であることが筋の表現を利用して明らかにされ、その分類も行われた。また 2015 年前後になって、 B, D 型についても軌道の有限性や分類の研究が松本敏彦 (龍谷大) によって進んでいた。

対称対の二重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P,Q}$ の場合には、代表者と落合啓之 (九大)、大島芳樹 (IPMU)、Xuhua He (Maryland 大) 他によるいくつかの共同研究 (2009–2015) により、

- 二重旗多様体上の K 軌道が有限 (有限型) になるための 2 つの強力な十分条件や
- 球等質空間に付随した有限型二重旗多様体の完全な分類

が得られていた。

一方、当時、庄司俊明 (同済大)・加藤周 (京大) 等によって exotic な指標層の理論に関する研究が進んでいた。これは、 G が自然に作用するベクトル空間 V と対称空間 G/K の直積 $X_V = V \times G/K$ 上の K 同変な偏屈層の理論だが、Grojnowski の定式化により $V \times G/B$ 上の幾何学的セル構造と深く関係することが分かっている。放物型部分群 $Q \subset K$ を適切に選べば、 $K/Q = \mathbb{P}(V)$ は V の射影化なので、この多様体は $\mathfrak{X}_{B,Q} = K/Q \times G/B$ と非常に近く、本研究のテーマと密に関係していた。しかし、対称空間に付随する二重旗多様体に関してこのような幾何学的セル構造の研究は本研究開始当初はほとんどなかった。

2. 研究の目的

G を簡約代数群、また B を G のボレル部分群とする。(完全) 旗多様体 G/B や部分旗多様体 G/P (P は放物型部分群) は G の等質空間でコンパクトなもの (射影多様体) である。グラスマン多様体や射影空間は $G = \mathrm{GL}_n$ の極大放物型部分群 P を用いて G/P と書け、部分旗多様体の特殊なものになっている。以下、部分旗多様体も総称して旗多様体と呼ぶ。旗多様体は、特に表現論において、数ある等質多様体の中でも最重要な多様体の一つである。

本研究では、群 G だけでなく対称空間も大きな役割を果たす。包含的自己同型 $\theta \in \text{Aut}(G)$, $\theta^2 = \text{id}$ に対して、 $K = G^\theta$ を G の対称部分群、 G/K を対称空間といい、この多様体もまたリー群の表現論の主要な研究対象である。そこで G の旗多様体 G/P と K の旗多様体 K/Q を考え、この直積

$$\mathfrak{X}_{P,Q} := G/P \times K/Q \quad (P \text{ は } G \text{ の}, Q \text{ は } K \text{ の放物型部分群})$$

に K が対角的に作用するようなものを、対称空間に付随した二重旗多様体と我々は呼ぶのである。

対称空間に付随する二重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P,Q}$ に球部分群 K の作用を考え、Steinberg 多様体（余法束多様体）とそのモーメント写像の像である exotic な冪零多様体 \mathfrak{N} や幾何学的セルの構造を研究するのが本研究の目的である。究極的には、exotic 指標層や Harish-Chandra 加群の相互関係を理解する枠組みを確立することにあるが、たとえば、 K 軌道が有限の場合には X と \mathfrak{N} の K 軌道の間には“よい”組合せ論的対応 (exotic Robinson-Schensted 対応, 一般化された RSK 対応) があり、このような軌道の幾何学を X 上のシューベルト解析なども絡めながら組合せ論によって理解することも重要な目的の一つであった。

3. 研究の方法

多重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P,Q}$ 上の K 軌道の分類と exotic な冪零錐における冪零軌道の分類を、海外の研究協力者 (共同研究者) である Lucas Fresse (Lorraine 大学) とともに行った。典型的な古典群の場合にヤング図形の組合せ論による分類ができるはずとの期待から、一番単純な場合である AIII 型の対称空間の場合、つまり

$$G = \text{GL}_n \supset K = \text{GL}_p \times \text{GL}_q \quad (n = p + q)$$

であって、二重旗多様体が有限型である典型的な場合から研究を行った。2016–2019 年にかけて、何度もナンシー大学を訪問し、黒板を用いたセミナーで具体的な計算例を積み重ねていった。しかし、2020 年を境に、コロナウィルスによる世界的なパンデミックの影響で、セミナーは主にオンラインで行うことになり、研究の進展にも重大かつ大きな影響があった。オンラインセミナーはパンデミックの期間中、重要な役割を担ったが、パンデミックによる制限が次々と解除された後も研究の手法として定着し、週に一度程度のオンラインセミナーもすでに 100 回を数えるまでになっている。

一方、和地輝仁教授 (北海道教育大) および Bent Ørsted 教授 (Aarhus 大学) と、二重旗多様体上の球関数と概均質ベクトル空間上の相対不変式についての研究を進め、b-関数や軌道積分と主系列表現の間の intertwining 作用素の具体的な記述を共同研究した。この研究は、代表者が在外研究で欧州を歴訪していた際に大きく進展したが、パンデミック以降研究が進まなくなってしまった。所定の結果は得られたとはいうものの、研究をより遠くまで進めることができなかつたのは残念である。

4. 研究成果

得られた研究成果を箇条書きにまとめてみる。

(1) AIII 型二重旗多様体上の対称部分群 K による軌道を、グラフやヤング図形を用いた組合せ論的によって分類した。その分類を利用して次元、閉包関係などの不変量を具体的に決定した。(Lucas Fresse 教授との共同研究.)

(2) AIII 型二重旗多様体の余法束多様体から 2 種の冪零多様体へのスタインバーグ写像を構成した。一方は、対称部分群 K のリー環の冪零多様体への写像であり、こちらはヤング図形の組で分類されている。スタインバーグ写像のファイバーは古典的な場合のシュプリンガーファイバーに相当するが、その既約分解の成分は 2 色の色つき標準盤で分類できる。これらのヤング図形、色つき標準盤の対応は RSK 対応の一般化とみなすことができる。その組合せ論的な応用は将来の研究課題として考えていきたい。

もう一方のスタインバーグ写像は、余法束多様体から対称空間の余接空間の冪零多様体への写像になるが、冪零軌道は符号付きヤング図形によって分類される。そのファイバーの構造は複雑であり、既約成分の分類は将来の課題である。こちらは別の RSK 対応の一般化を与えるはずであり、組合せ論的な興味がある。(Lucas Fresse 教授との共同研究。)

(3) リー環の随伴作用を箴の表現を用いて拡張したものを拡大随伴作用 (enhanced adjoint action) と呼ぶ。リー環が A 型るとき、この作用に関する不変式論、冪零多様体の既約分解や冪零軌道の構造を詳細に研究した。一般の半単純軌道や軌道のジョルダン分解なども考えることができる。(太田琢也教授との共同研究)

(4) 旗多様体の拡大 (enhanced flag manifold) を定義して、概均質ベクトル空間と関係付け、相対不変式を利用することによって退化主系列表現の間の絡作用素を構成した。また、相対不変式によって決まるゼータ積分のフーリエ変換を計算し、そのガンマ因子などの具体形を決定した。(Bent Ørsted 教授、和地輝仁教授との共同研究)

(5) 以前研究した軌道の埋め込み定理を応用して、CI 型の二重旗多様体を AIII 型の二重旗多様体へと埋め込んで、軌道間の対応を決定した。冪零軌道の埋め込みも成り立っているので、軌道はスタインバーグ写像と整合的に埋め込まれていると予想される。(Lucas Fresse 教授との共同研究。)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 7件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Fresse Lucas, Nishiyama Kyo	4. 巻 6
2. 論文標題 On generalized Steinberg theory for type AIII	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 165 ~ 195
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/alco.245	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Fresse Lucas, Nishiyama Kyo	4. 巻 768
2. 論文標題 Orbit embedding for double flag varieties and Steinberg maps	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 21 ~ 42
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/conm/768/15451	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Fresse Lucas, Nishiyama Kyo	4. 巻 80
2. 論文標題 A Generalization of Steinberg Theory and an Exotic Moment Map	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 1-62
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnaa080	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Nishiyama Kyo, Orsted Bent, Wachi Akihito	4. 巻 1194
2. 論文標題 Enhanced zeta distributions and its functional equations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Physics: Conference Series	6. 最初と最後の頁 012081 ~ 012081
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1742-6596/1194/1/012081	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Nishiyama Kyo, Ohta Takuya	4. 巻 298
2. 論文標題 Enhanced adjoint actions and their orbits for the general linear group	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Pacific Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 141 ~ 155
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/pjm.2019.298.141	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nishiyama Kyo, Orsted Bent	4. 巻 274
2. 論文標題 Real double flag varieties for the symplectic group	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 573 ~ 604
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jfa.2017.07.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Lucas Fresse and Kyo Nishiyama	4. 巻 20
2. 論文標題 On the exotic Grassmannian and its nilpotent variety	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Representation Theory	6. 最初と最後の頁 451--481
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/ert/489	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kyo Nishiyama, Peter Trapa and Akihito Wachi	4. 巻 68
2. 論文標題 Codimension one connectedness of the graph of associated varieties	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Tohoku Math. J.	6. 最初と最後の頁 199--239
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2748/tmj/1466172770	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計20件（うち招待講演 14件 / うち国際学会 11件）

1. 発表者名 西山享
2. 発表標題 二重旗多様体上の軌道とヘッケ環の表現
3. 学会等名 第2回概均質ベクトル空間ミニワークショップ（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kyo Nishiyama
2. 発表標題 Steinberg theory for symmetric pairs
3. 学会等名 Representation Theory XVI（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kyo Nishiyama
2. 発表標題 Robinson-Schensted Correspondence for Symmetric Pairs of Hermitian Tube Type
3. 学会等名 International Symposium on Advances and Perspectives in Representation Theory（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kyo Nishiyama
2. 発表標題 RSK correspondence and geometry
3. 学会等名 GCT Mini workshop（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 西山 享
2. 発表標題 ある積分核作用素のフーリエ変換とその解析接続
3. 学会等名 第58回実函数論・函数解析学合同シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 西山 享
2. 発表標題 Steinberg 理論の一般化 (A型の場合)
3. 学会等名 日本数学会秋期総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 西山 享
2. 発表標題 A 型対称対の exotic Robinson-Schensted 対応
3. 学会等名 日本数学会秋期総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kyo Nishiyama
2. 発表標題 Analytic continuation and Fourier transform of intertwiners between degenerate principal series
3. 学会等名 Seminar on Lie groups and representation theory (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kyo Nishiyama
2. 発表標題 Functional equation of an enhanced zeta distribution
3. 学会等名 Workshop "Dirac operators and representation theory" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kyo Nishiyama
2. 発表標題 Fourier transform of the Riesz distribution on enhanced symmetric cone
3. 学会等名 The 32nd International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics (Group32) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kyo Nishiyama
2. 発表標題 Fourier transform of zeta integrals over enhanced positive cone
3. 学会等名 Workshop on The Legacy of Joseph Fourier after 250 years, Dec.17-21, 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kyo Nishiyama
2. 発表標題 Robinson-Schensted Correspondence and Flag Varieties
3. 学会等名 MPI-INF and MPI-MiS joint workshop on Theoretical Computer Science and Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kyo Nishiyama
2. 発表標題 Integral kernel operators on tube domain associated with relative invariants
3. 学会等名 2017 Nankai Workshop on Representation Theory and Harmonic Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kyo Nishiyama
2. 発表標題 Integral kernel operators for degenerate principal series
3. 学会等名 Representation Theory XV (Dubrovnik) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kyo Nishiyama
2. 発表標題 Moment map and nilpotent orbits
3. 学会等名 Colloquium (Wuhan University) (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 西山 享
2. 発表標題 Enhanced adjoint action and its quotients
3. 学会等名 2017年度RIMS共同研究(公開型)「表現論と組合せ論」
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kyo Nishiyama
2. 発表標題 Intertwiners associated to a double flag variety over reals
3. 学会等名 Workshop on Lie groups and representation theory (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kyo Nishiyama
2. 発表標題 Intertwiners Between Degenerate Principal Series Arising From a Double Flag Variety
3. 学会等名 Harmonic Analysis on Lie Groups and Group Algebras of Locally Compact Groups (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 西山享
2. 発表標題 エルミート対称対の二重旗多様体と退化主系列表現
3. 学会等名 2016年度表現論シンポジウム
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 西山享
2. 発表標題 Enhanced adjoint action and nilpotent variety
3. 学会等名 農工大数学セミナー 2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Web page of Kyo Nishiyama
http://www.math.aoyama.ac.jp/~kyo/index_math.html

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	フレッセ ルーカス (Fresse Lucas)	ロレーヌ大学	
研究協力者	和地 輝仁 (Wachi Akihito)	北海道教育大学	
研究協力者	エルステッド ベント (Orsted Bent)	オーフス大学	
研究協力者	太田 琢也 (Ohta Takuya)	東京電機大学	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------