

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 3 年 5 月 24 日現在

機関番号：32641

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2020

課題番号：16K05072

研究課題名(和文) コホモロジーとモジュラスを用いた代数的サイクルの研究

研究課題名(英文) Research on algebraic cycles using cohomology and modulus

研究代表者

佐藤 周友 (SATO, Kanetomo)

中央大学・理工学部・教授

研究者番号：50324398

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：2016年度からの研究期間を通して、高次の代数的サイクル(高次Chow群を定義する際に用いるようなスキームとアフィン空間の積の上のサイクル)の理論の簡易化、算術的スキームのエタールコホモロジー、およびコホモロジー群におけるサイクル類(あるいは高次の特性類)に関する研究を行ってきた。特に、Uwe Jannsenが1989年に提起した代数体のGaloisコホモロジーに関する局所・大域原理の問題を、係数のエタールコホモロジーの重みに関する制限つきで(ただし、モチーフに関係なく)解決した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

算術的曲面(整数係数の代数方程式系で定義されたよい図形で2次元の広がりをもつもの)のゼータ関数の $s=2$ での留数を有限個の素数べき倍による曖昧さを除いて記述できるような例が(何の予想も仮定せずに)構成できるようになった。

研究成果の概要(英文)：Through the period of this research from 2016, I have been explored how to simplify the theory of higher algebraic cycles (cycles on products of a scheme and affine spaces, as we use to defined higher Chow groups) and studied cycle classes (and higher characteristic classes) in cohomology groups. In particular, it is a nice achievement to have solved a conjecture raised by Uwe Jannsen in 1989 under some restriction on weights of 'etale cohomology in coefficients (but without any restrictions on motives), concerning a local-principal of Galois cohomology of 'S-ramified' Galois groups.

研究分野：数論幾何学

キーワード：算術的スキーム 代数的サイクル 代数的K群 サイクル類 Chern類 エタールコホモロジー Galois  
コホモロジー 局所・大域原理

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

スキーム (特に代数的整数環や  $p$  進整数環といった整数論で重要な環の上で有限型な正則スキーム) のエタールコホモロジー、あるいはスキーム上の代数的サイクルといった対象は、整数論において重要ないくつかの予想と深く関係しており、それらの研究にも大きな意義がある。

近年、スキーム  $X$  と有効 Cartier 因子  $D$  の組  $(X, D)$  が与えられた状況で、Federico Binda 氏と斎藤秀司氏は  $X-D$  上 (あるいはより一般に、 $X-D$  とアフィン空間の積空間上) のサイクルに対し ( $D$  に関する) モジュラス条件を定式化し、組  $(X, D)$  に対するモジュラス付きサイクル複体  $\mathcal{Z}(X|D, *)$  を定義した。この複体のホモロジー群はモジュラス付き高次 Chow 群と呼ばれ、代数的サイクルの研究において新たな展開が期待されている。一方、スキームよりも大きいカテゴリーに属する幾何学的対象 (例えば、単体的スキームなど) の上の代数的サイクル、あるいはモチーフの理論も今後大いに展開の余地がある。

## 2. 研究の目的

代数的整数環あるいは  $p$  進整数環上のスキームのサイクルの研究への応用を見据えて

(1) モジュラス付きサイクル複体  $\mathcal{Z}(X|D, *)$  の局所的な性質を調べる

(2) Voevodsky のモチーフ複体が許容のコホモロジー理論であることを示す

ということを主な目的とした。ここで許容のコホモロジー理論とは代表者が北海道大学大学院理学研究院の朝倉政典氏との共同研究で導入した概念 (一定の条件をみたす Zariski 層の複体の族) で、ホモトピー不変性を仮定しない代わりに、単体的スキームの正則埋め込み射に対して Gysin 射 (push-forward 射) が存在することを条件にしている。

## 3. 研究の方法

(1) については、 $X$  が局所環のスペクトラムの場合に、開集合  $U := X-D$  上 (あるいは、 $U$  とアフィン空間の積空間上) のサイクルで「コンパクト台をもつ」ようなもの全てを集めたサイクルの複体  $\mathcal{Z}(X|U, *)$  を考え、この複体が引き戻し射  $\mathcal{Z}(X, *) \rightarrow \mathcal{Z}(U, *)$  の mapping fiber であることを示す、ということを実行し、次に  $D$  が被約な場合に  $\mathcal{Z}(X|U, *)$  と  $\mathcal{Z}(X|D, *)$  の比較を行うことを第 2 のステップとして設定した。これらの議論はサイクルの移動 (moving) の議論が本質的であり、東北大学大学院理学研究科の山崎隆雄氏、理学研究所 AIP センターの萩原啓氏らとの共同研究で議論を進めた。

(2) については、朝倉氏との共同研究で議論を進めた。体上のスムーズ多様体からなる単体的スキーム上の直線束の第 1 チャーン類から Voevodsky のモチーフの圏の単体的対象の射を構成するところが一つの鍵となる。

## 4. 研究成果

(1)  $X$  がネーター局所環  $R$  上のアフィン空間  $A$  を零切断  $\text{Spec } R \rightarrow A$  に沿って局所化した局所スキーム、 $Y$  が  $A \rightarrow \text{Spec } R$  の零切断の場合に  $\mathcal{Z}(X|U, *)$  (ただし  $U := X-Y$ ) が  $\mathcal{Z}(Y, *) \rightarrow \mathcal{Z}(A, *)$  の mapping fiber と同型である、ということを実証した。証明では多項式の性質に着目してある種の縮小ホモトピーが具体的に構成できるという点が鍵になる。ただしこの結果については共同研究者 (萩原氏) と相談の上、まだ論文での発表をする段階ではないと判断している。

(2) 体上スムーズな多様体からなる単体的スキームの正則埋め込みに対して、モチーフ複体の Gysin 射を構成した。これによって、スムーズな多様体の圏に対してモチーフ複体が許容のコホモロジー理論であることも証明できた。Gysin 射の構成では Grothendieck アーベル圏 (具体的には Voevodsky の移送付き Nisnevich 層の圏) 上の複体 (unbounded complexes) の圏に関するホモトピー論を考えることが一つの鍵となり、ここでも萩原氏の協力を得た。この結果については上述の朝倉氏との共同研究についてまとめた論文 'Chern class and Riemann-Roch theorem for cohomology theory without homotopy invariance' の補遺 A, B として J. Math. Sci. Univ. Tokyo より出版された。

(3) 代数的整数環上固有かつ平坦な正則スキーム  $X$ 、素数  $p$  および整数  $r \geq \dim X$  に対し、 $\mathbb{Q}_p(r)$  係数エタールコホモロジーが Bloch-Kato の Selmer 群に同型であることを証明した (正確には、 $X$  が  $p$  を割る各素点で log smooth reduction をもつという条件を仮定)。この結果は、代表者が十九年前に一度考えて、その後放置していたアイデアを改めて見直すことによって得られた。さらにこの基本定理をもとに、算術的曲面 ( $\dim X = 2$ ) の場合にゼ

ータ関数  $\zeta(X, s)$  の  $s = r (\geq 2)$  での値の「 $p$  と互いに素な有理数倍を無視した」記述に応用した。後半のゼータ値の記述の計算で山崎氏の協力を得た。この結果については 2021 年 3 月の時点で専門誌に投稿中である。

なお、(3) の結果は代表者と斎藤秀司氏（東京大学大学院数理科学研究科）の共著論文 ‘On  $p$ -adic vanishing cycles of log smooth families’ の主結果を用いているが、この論文も本研究期間中に雑誌 *Tunisian J. Math.* に受理された。この論文では、混標数の離散付値環上の log smooth 族の  $p$  進消滅輪体の層が生成ファイバー上の可逆関数たちのなすシンボルで生成されることを示した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Masanori Asakura, Kanetomo Sato, Kei Hagihara	4. 巻 26
2. 論文標題 Chern class and Riemann-Roch theorem for cohomology theory without homotopy invariance	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Math. Sci. Univ. Tokyo	6. 最初と最後の頁 1 - 86
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shuji Saito, Kanetomo Sato	4. 巻 2
2. 論文標題 On p-adic vanishing cycles of log smooth families	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Tunisian J. Math.	6. 最初と最後の頁 309 - 335
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/tunis.2020.2.309	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 11件 / うち国際学会 6件）

1. 発表者名 佐藤周友
2. 発表標題 算術的スキームのエタールコホモロジーと Selmer 群
3. 学会等名 談話会（東京工業大学）（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kanetomo Sato
2. 発表標題 Etale cohomology and a zeta-value of arithmetic schemes
3. 学会等名 Regulators in Niseko 2019 (ヒルトンニセコビレッジ) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 佐藤周友
2. 発表標題 算術的曲面のエタールコホモロジーとゼータ値
3. 学会等名 談話会（京都大学）（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kanetomo Sato
2. 発表標題 Etale cohomology and a zeta-value of arithmetic schemes
3. 学会等名 Rational Points on Higher Dimensional Varieties（京大数理研）（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 佐藤周友
2. 発表標題 ゼータ関数とコホモロジー
3. 学会等名 中央大学理工学部数学科談話会（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐藤周友
2. 発表標題 算術的曲面のエタールコホモロジーとSelmer群
3. 学会等名 早稲田大学整数論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kanetomo SATO
2. 発表標題 Etale cohomology and Selmer groups of arithmetic schemes
3. 学会等名 Motives in Tokyo 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kanetomo SATO
2. 発表標題 Cycle complexes extended by zero and with modulus
3. 学会等名 函館数論幾何ワークショップ2016 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kanetomo SATO
2. 発表標題 Cycle complex and motivic cohomology extended by zero
3. 学会等名 日台数論合同研究集会2016 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kanetomo SATO
2. 発表標題 Cycle complex and motivic cohomology extended by zero
3. 学会等名 p-adic Methods in Arithmetic Geometry in Sendai 2016 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 佐藤周友
2. 発表標題 コンパクト台のモチビッコホモロジーについて
3. 学会等名 談話会（招待講演）
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Regulators in Niseko 2019	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Motives in Tokyo 2018 on the occasion of Shuji Saito's 60th birthday	開催年 2018年～2018年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関