

令和元年6月25日現在

機関番号：32652

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05073

研究課題名(和文) 頂点作用素代数の構造的対称性の追求

研究課題名(英文) Research on structural symmetries of vertex operator algebras

研究代表者

山内 博 (Yamauchi, Hiroshi)

東京女子大学・現代教養学部・准教授

研究者番号：40452213

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究ではOZ型頂点作用素代数の構造論的対称性の研究を行った。頂点作用素代数は無次元の代数系であるが、付随するグライス代数は有限次元であり、頂点作用素代数の部分構造を取り出したものである。グライス代数が頂点作用素代数の全体構造をどのように制約しているか、研究を行い、シグマ型イジング元で生成される頂点作用素代数の場合には単純な頂点作用素代数構造が一意に定まることを示した。この場合、グライス代数は松尾代数として記述される。また、群のフュージョンを持つ頂点作用素代数を部分代数を含む拡大について、一般論を整備し、拡大前後の表現圏のグロタンディーク環の間の関係を二次形式を用いて明確にした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

高い対称性を持った構造は数学および物理学で重要であり、また興味を引く研究対象である。本研究では二次元共形場理論の代数的定式化である頂点作用素代数における対称性について、構造論によるアプローチで研究を行い、3互換群に関連するクラスについて、内在的な特徴付けを与える成果を得た。また、このようなクラスに属する例を与える構成法について一般論を展開し、フュージョン代数間の双対性を有限可換群上の二次形式による双対性として記述する理論を確立した。

研究成果の概要(英文)：I have researched on structural symmetries of vertex operator algebras of OZ-type. The Griess algebra is a finite dimensional substructure of a vertex operator algebra which is an infinite dimensional object. I have proved the uniqueness of the structure of a simple vertex operator algebra generated by Ising vectors of sigma-type, where the Griess algebra for such a vertex operator algebra is described by Matsuo algebras. I have also researched on a vertex operator algebras which involves a subalgebra having group-like fusion. I have described a duality between Grothendieck rings of the representation categories of vertex operator overalgebra/subalgebra via quadratic forms on finite abelian groups arising from modular tensor category.

研究分野：代数学・頂点作用素代数

キーワード：頂点作用素代数 ヴィラソロ代数 3互換群 テンソル圏 双対性

## 1. 研究開始当初の背景

ムーンシャイン頂点作用素代数はモンスター散在型有限単純群をその自己同型群に持つことから特に対称性の高い頂点作用素代数と考えられているが、その対称性は単に自己同型群が特別という事実だけに留まらない。ムーンシャイン頂点作用素代数は正則性やC2有限性、ユニタリー形式など、頂点作用素代数の一般論を展開する上で必要とされる良い条件をすべて満たしており、これらの帰結として指標の保型性が得られるなど、頂点作用素代数の一般理論からもその重要性が認識されている。ゴレー符号およびリーチ格子は極値的かつ自己双対的な24次元の符号および格子として一意的に特徴づけられており、その自然な類似として中心電荷24の極値的な正則頂点作用素代数はムーンシャイン頂点作用素代数に限るであろうという主張がムーンシャイン頂点作用素代数の一意性予想である。この一意性予想を含む予想として、中心電荷24の正則頂点作用素代数の分類問題がある。スケレケンの考察により、中心電荷24の正則頂点作用素代数は71個存在し、これらはその次数1の部分空間に入るリー代数構造により一意的に分類されるという予想が提案された。これはムーンシャイン頂点作用素代数の一意性予想を包含する強い予想であった。その後の研究の進展から、2019年現在では、自明なリー代数を持つムーンシャイン頂点作用素代数を除く、非自明なリー代数を持つ70個について、一意性が確立されている。しかし、リー代数が自明となるムーンシャイン頂点作用素代数の一意性問題だけはリー理論が使えないことから、別個に考える必要があり、最も難しく、現在でも未解決である。

ムーンシャイン頂点作用素代数の一意性予想の難しさは足がかりとなる前提結果がほとんど何もない点にある。中心電荷24の極値的な正則頂点作用素代数の場合、次数1の部分空間は自明であることから、付随するリー代数を用いる手法は使えない。また、指標の保型性を利用しようにも、中心電荷が24の場合、正則な頂点作用素代数の指標には定数項の違いしかなく、リー代数の次元以上の情報はこれだけからは得られない。そのためこれまでの研究では何らかの追加の仮定を設けることで一意性予想が扱われてきた。次数2の部分空間の構造に入るグライス代数と呼ばれる可換代数構造にモンスターの作用を仮定すればムーンシャイン頂点作用素代数を特徴づけられるというドン達の結果と、ヴィラソロ枠と呼ばれる特別な部分代数の存在を仮定すれば特徴づけられるというラムと申請者による結果が知られていた。申請者の証明ではリーチ格子に付随する格子頂点作用素代数へと軌道体変形を行い、もう一度軌道体変形を行うことで、ムーンシャイン頂点作用素代数との同型を構成しており、軌道体変形をうまく行うことが要点となっている。軌道体変形を実行するには頂点作用素代数の自己同型を定める必要があり、ヴィラソロ枠はそのためにも必要であった。そこで一意性予想の攻略には自己同型を導き出す何らかの機構を見出す必要があり、グライス代数や共形デザインなど、頂点作用素代数の構造論を詳しく調べ、自己同型へとつながる構造的対称性について研究を行う必要があった。

## 2. 研究の目的

究極的な目標はムーンシャイン頂点作用素代数の一意性予想の証明である。そのための手段として、軌道体変形に用いる自己同型を導き出す構造的機構を発見し、定式化する必要があった。ここで頂点作用素代数のグライス代数にノルムが $1/8$ より小さい冪等元があれば、宮本の方法により頂点作用素代数の自己同型を定めることができる。そのため、頂点作用素代数の内在的な代数構造からグライス代数における冪等元の存在を導く構造的対称性を追求し、軌道体変形を実行できる枠組みを整備することが本研究の目的である。また、冪等元は一次元のグライス代数であるから、多次元化による一般化として、頂点作用素代数がグライス代数で生成されているとき、頂点作用素代数の全体構造がグライス代数構造により特徴づけられるクラスを明らかにすることも応用上重要であり、そのようなクラスの追求も行った。

### 3. 研究の方法

頂点作用素代数の構造的対称性として共形デザイン構造がある。高い共形デザイン構造を持つ頂点作用素代数ではグライス代数における松尾・ノートン跡公式が成立し、グライス代数における冪等元の固有値に対して制限が入るが、この跡公式をグライス代数ではなく頂点作用素代数全体に拡張できれば、より多くの関係式が得られることが期待できるため、跡公式の一般化について取り組んだ。頂点作用素代数全体での跡については、1次の場合はゾーによる保型性の研究において調べられており、また、2次の場合には、松尾・ノートン跡公式を導出する際に、松尾によりすでに拡張済みであった。よって3次以上の場合が問題である。そこで3次の場合を2次以下に帰着する漸化式を考察し、ゼロモードだけで表現できないか変形を試みたが、頂点作用素代数における積構造は結合的ではないため、この漸化式は本質的にゼロモード以外の作用素を含んでおり、この方向における研究には困難が生じた。そこで跡公式に関する研究は一旦棚上げし、一般論を追求するのではなく、構造的対称性の高い頂点作用素代数の具体例を調べ、その特徴について詳しく解析し、指針となる知見を集めることにした。

冪等元との関連を考えて発想を逆転させて、まず部分構造であるグライス代数に冪等元の存在を仮定し頂点作用素代数全体が冪等元から生成されている場合に、その構造の一意性が成り立つかどうかという問を立てた。一意性が成り立たない場合、その障害がどの部分から来るのかを調べることで、冪等元の存在に関する手がかりが得られると考えたからである。仮定を設けず一般的に考えることは難しいため、事例研究として、冪等元としてイジング元をとり、さらにその中でもシグマ型と呼ばれる、冪等元がグライス代数において生成する部分代数が生成元の線形和で閉じる場合について考察した。

### 4. 研究成果

構造的対称性の高い頂点作用素代数の例としては、3互換群に付随する松尾代数をグライス代数を持つ頂点作用素代数が挙げられる。松尾代数は冪等元で張られており、対応する中心電荷が $1/2$ のときはユニタリ性の仮定の下で、どのような3互換群と付随する松尾代数が実現可能かは北詰・宮本によって研究が行われ、松尾により最終的な分類が得られていた。しかし、その分類は実現可能な群について行われており、松尾の分類リストではグライス代数のみが分類されていた。そのため、この分類リストに現れるグライス代数を持つ頂点作用素代数の構造の一意性は未解決であった。そこで中心電荷 $1/2$ の松尾代数の非退化商として得られるグライス代数で生成される頂点作用素代数の一意性問題について、ジアン、ラムと共同で取り組み、単純性の仮定の下で、その構造の一意性を証明した。副産物として、松尾の分類におけるユニタリ性、すなわち頂点作用素代数上にユニタリー形式が入るという仮定を、グライス代数上の内積に関する正定値性に帰着する結果も得られた。また、A型のワイル群、すなわち対称群の場合には冪等元全体が松尾代数において一次独立となる特殊事情があり、これを利用して、単純性の仮定を外しても、A型の場合には一意性が成り立つことも証明できた。以上の成果を論文としてまとめ、Math. Z に投稿し、掲載を受理された。

さて、上述した松尾代数で生成される頂点作用素代数の多くはハイゼンベルグ代数および格子に付随する頂点作用素代数の交換団として得られることが先行研究により知られていた。このような構成法は可換余集合構成法と呼ばれており、パラフェルミオン代数との関連から、近年盛んに研究されている。既存の研究では、個別の例毎にその表現論が展開されていたが、可換余集合構成法を含む、一般的な状況における理論を山田と共同で展開した。可換余集合構成法では格子頂点作用素代数の交換団を考えるが、格子頂点作用素代数は群のフュージョンを持つ。一般に群のフュージョンを持つ頂点作用素代数のフュージョン代数は有限可換群に付随する群環と同型であるが、頂点作用素代数に付随するモジュラーテンソル圏の構造から、この可換群には自然に非退化な二次形式の構造が入る。そこで可換余集合構成法

から得られる頂点作用素代数の表現圏をこの二次形式と関連させて調べ、二次形式における直交補群を用いて、可換余集合構成法を適用する前の頂点作用素代数と、適用後に得られる頂点作用素代数のフュージョン代数を相互に記述する定理を確立した。この成果を論文にまとめ、プレプリントサーバーに投稿し公開した。その後、既知の結果とオーバーラップする部分が見つかったため、当該箇所を修正した後に、学術誌に投稿する予定である。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 2 件)

(1) Ching Hung Lam, Cuipo Jiang and Hiroshi Yamauchi,

Vertex operator algebras generated by  $\sigma$ -involutions.

Mathematische Zeitschrift, 2018, p. 1-18 (online). 査読有り

doi:10.1007/s00209-018-2184-0

(2) Tomoyuki Arakawa, Hiromichi Yamada and Hiroshi Yamachi,

Vertex operator algebras associated with  $Z/Zk$ -codes.

Lie Theory and Its Applications in Physics 191 (2016), p. 513-521. 査読有り

doi:10.1007/978-981-10-2636-2\_38

[学会発表](計 8 件)

(1) 山内博, 群的フュージョンを持つ VOA と二次形式

RIMS共同研究(公開型)「代数的組合せ論と関連する群と代数」

京都大学数理解析研究所, 2018年12月10日

(2) Hiroshi Yamauchi, Simple current extensions and quadratic spaces

Vertex Operator Algebras and Related Topics

Sichuan University, Chengdu, China, 2018年11月4日

(3) 山内博, 群的フュージョンと二次形式

第30回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, 2018年7月29日

(4) Hiroshi Yamauchi, VOAs and Miyamoto involutions of  $\sigma$ -type

Finite Groups, VOAs, and Related Topics, 筑波大学, 2018年3月12日

(5) Hiroshi Yamauchi,

An approach to the moonshine VOA via the symmetric group of degree 24

One day workshop on VOA

中央研究院数学研究所, 台北, 2017年8月21日

(6) 山内博,  $F_123$ からMへのアプローチ

第29回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, 2017年8月5日

(7) Hiroshi Yamauchi, Matsuo algebras and vertex operator algebras,  
Representation Theory XV, Inter-University Centre, Dubrovnik, 2017年6月20日

(8) Hiroshi Yamauchi,  
On Conway-Miyamoto correspondences for Fischer 3-transposition groups  
The XXIVth International Conference on Integrable Systems and Quantum Symmetries  
Czech Technical University Prague, 2016年6月17日

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年:

国内外の別:

○取得状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年:

国内外の別:

[その他]

ホームページ等

## 6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名:

ローマ字氏名:

所属研究機関名:

部局名:

職名:

研究者番号(8桁):

(2)研究協力者

研究協力者氏名:

ローマ字氏名:

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。