

令和元年6月14日現在

機関番号：32657

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05075

研究課題名(和文) 数論的ゼータ関数間の独立性について

研究課題名(英文) Independence of arithmetic zeta functions

研究代表者

見正 秀彦 (MISHO, Hidehiko)

東京電機大学・システムデザイン工学部・教授

研究者番号：10435456

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究期間中に次の3つの成果が得られた。(1)Riemann予想を仮定したとき、Euler-Zagier double zeta-function $Z(s)$ の臨界線 $\text{Re}(s)=1/2$ 上での値分布の2次元稠密性が成り立つことを証明した。(2)Yonbook Lee氏(Incheon大学)との共同研究により、異なる代数的無理数に付随するHurwitz zeta関数の値分布の独立性を証明した。(3)名越弘文氏(群馬大学)との共同研究により、実指標に付随するDirichlet L関数間の同時普遍性定理を得た。その応用として、2次体の類数の独立性が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

結果(1)(3)の学術的意義について説明する。(1) Riemann zeta 関数 $\zeta(s)$ と関数 $Z(s)$ の領域 $\text{Re}(s) > 1/2$ 内での挙動はかなり似通っていることが知られている。一方、臨界線 $\text{Re}(s)=1/2$ 上では $\zeta(s)$ の値分布の2次元稠密性は成立しないことが知られている。結果(1)は臨界線上では $\zeta(s)$ と $Z(s)$ の挙動がはっきりと異なっていることを示している。(3) $d_j(1 \leq j \leq r)$ を異なる正の判別式としたとき、2次体の類数のベクトル $(h(d_1), \dots, h(d_r))$ は判別式 d の変動に伴い、 r 次元稠密性を示す。複数の類数の多次元値分布を扱った結果はこれが初めてである。

研究成果の概要(英文)：In this period, I obtained the following three results. (1) Under the Riemann hypothesis, I obtained the 2-dimensional denseness of the set of values of Euler-Zagier double zeta function on the critical line. (2) I and Professor Yonbook Lee proved a joint denseness of value-distributions of Hurwitz zeta functions associated with algebraic irrational real numbers which are linearly independent over the rational number field. (3) I and Professor Hirofumi Nagoshi proved the joint universality theorem for Dirichlet L-functions associated with real Dirichlet characters.

研究分野：解析的整数論

キーワード：ゼータ関数 値分布 普遍性

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

解析的整数論の重要な研究対象として、素数についての無限積表示を有する数論的ゼータ関数が挙げられる。素数分布はゼータ関数の零点分布との間には強い相関性があり、零点分布はゼータ関数研究の最も中心的な研究課題である。零点分布に関しては、「 (s) の全ての複素零点は臨界線 $\text{Re}(s)=1/2$ 上存在する」という Riemann 予想がよく知られている。一方で、帯領域 $D: 1/2 < \text{Re}(s) < 1$ におけるゼータ関数の統計的挙動を扱う値分布についても興味深い性質が幾つか知られている。代表的なものとしては、「 D 上の任意の正則関数 $f(s)$ に対し、実数を適当に取れば、 $f(s)$ は (s) の垂直方向への平行移動 $(s+i)$ により D 上広義一様近似できる」という普遍性定理が挙げられる。

上述した3つの側面のいずれについても、複数のゼータ関数間で独立性が成り立つと考えられている。例えば、Selberg は数論的ゼータ関数の族「Selberg 類」を考案し、この中では係数の直交性を表す素数定理型評価式が成り立つと予想している。この予想の下で Bombieri-Perelli は異なるゼータ関数は非共通零点を正の密度で持つことを証明している。また Lee-Nakamura-Pankowski は同予想の下で、任意個数の異なるゼータ関数に対し、領域 D 内の値分布の独立性を表す「同時普遍性定理」が成立することを証明している。

2. 研究の目的

本研究の主目的は2つある。1つは数論的ゼータ関数間の独立性を「零点分布」「値分布」「係数に対する素数定理型評価式」の3つの側面から確認することである。もう1つの目的は各独立性から多重ゼータ関数について対応する結果を得ることである。目的達成に向け、以下の5つの研究項目を掲げた。Riemann zeta 関数の零点を変数としたとき、複数のゼータ関数が示すと予想される同時普遍性の証明。複数のゼータ関数の零点を変数としたとき、Riemann zeta 関数の挙動が示すと予想される同時普遍性の証明。上記の同時普遍性から導かれる多重ゼータ関数の挙動の調査。保型 L 関数のフーリエ係数の符号が示す独立性の解明。Lee-Nakamura-Pankowski の結果を数論的パラメーター化し証明、代数的な結果を導く。

3. 研究の方法

(1) 2016 年度

前半期は研究項目 に取り組み、後述する研究成果(2)(3)が得られた。後半期は研究項目に関連した共同研究を名越弘文氏(群馬大学)と共に行い、研究成果(1)を得た。また雑誌論文[1]を執筆、投稿した。

(2) 2017 年度

前半期は研究項目 に取り組み、研究成果(4)を得た。また後半期は、韓国の Incheon 大学を訪問し、Yoonbok Lee 氏と Hurwitz zeta 関数の値分布についての共同研究を行い、研究成果(5)を得た。

(3) 2018 年度

前半期は Y. Lee 氏、Raivydas Simenas 氏(Vilnius 大学、リトアニア)を迎え、共同研究を行った。Lee 氏とは成果(5)についての論文執筆に取り組み、Simenas 氏とは Selberg zeta 関数の値分布に取り組んだ。後半期は名越氏との共同研究で成果(6)を得て、論文を執筆、投稿した。

4. 研究成果

本研究期間中に以下の6つの成果が得られた。

(1) Dirichlet 指標の変動に伴う Dirichlet L 関数の同時普遍性定理

名越氏との共同研究により次の結果が得られた。 $\chi_j(1-j-r)$ を相異なる Dirichlet 指標とする。 K を領域 $1/2 < \text{Re}(s) < 1$ 内の単連結コンパクト集合、 $f_j(s)(1-j-r)$ を K 上零点を持たない正則関数としたとき、適切な指標 χ を選べば、各 $f_j(s)$ は指標の積に付随する Dirichlet L 関数 $L(s, \chi_j)$ により一様近似することが可能となる。またこの結果の応用として、Dirichlet L 関数の線形和を適当な指標で twist すると、領域 D 内で任意個数の零点を持つことが示された。この結果については雑誌論文[2]にまとめている。

(2) (s) の零点虚部を変数としたときの Dirichlet L 関数の同時普遍性定理

Riemann 予想を仮定したとき、 (s) の複素零点は $1/2+i$ と表される。報告者は以前、 (s) と素数分布の関連を示す Landau の公式を利用することで、与えられた正則関数 $f(s)$ に対し、平行移動 $(s+i)$ が $f(s)$ を一様近似するような零点虚部 β が正の密度で存在することを証明した。この手法を一般化することで、報告者は次の結果を得た。 $\chi_j(1-j-r)$ を相異なる Dirichlet 指標とする。 K を領域 $1/2 < \text{Re}(s) < 1$ 内の単連結コンパクト集合、 $f_j(s)(1-j-r)$ を K 上零点を持たない正則関数としたとき、適切な零点虚部 β を選べば、各 $f_j(s)$ は $L(s+i, \chi_j)$ により一様近似することが可能となる。この結果については学会発表で報告した。

(3) (s) の零点虚部を変数としたときの Hurwitz zeta 関数の普遍性定理

実数 $0 < \alpha < 1$ に対し、Hurwitz zeta 関数 $\zeta(s, \alpha)$ が定義される。 α が超越数である場合、 (s, α) と $\log \zeta(s, \alpha)$ の値分布に関しては似通った挙動を示すことが知られている。報告者はこ

の点に着目し、(2)で用いた手法を応用して、任意の正則関数が $(s+i, \quad)$ で D 上広義一様近似できるような零点虚部 \quad が存在することを証明した。この結果について学会発表 \quad で報告した。

(4) 臨界線上での Euler-Zagier double zeta 関数の値分布の 2 次元稠密性

多重ゼータ関数の中で最も古典的かつ重要なものとして Euler-Zagier double zeta 関数 $\quad_2(u,v)$ が挙げられる。1 変数関数 $Z(s) = \quad_2(s,s)$ と Riemann zeta 関数 $\quad(s)$ との間には代数的な関係式が成立することから、値分布について多くの類似した性質が成立する。例えば Nakamura(2010) は $\quad(s)$ の普遍性定理から、領域 D 内で $Z(s)$ も普遍性を有することを証明している。一方、臨界線 $\text{Re}(s)=1/2$ 上での $\quad(s)$ の値分布については、Garunkstis-Stueding は点 $(\quad(1/2+it), \quad'(1/2+it))$ 全体の集合は C^2 内で稠密とならないことを得ている。

報告者は成果(2)(3)で述べた手法をより精密化することで、点 $(Z(1/2+it), Z'(1/2+it))$ 全体の集合が C^2 内で稠密となることを証明した。この結果は領域 D 内とは異なり、臨界線上では $Z(s)$ と $\quad(s)$ は異なった挙動を示すことを意味している。この結果について学会発表 \quad で報告した。

(5) 代数的無理数に付随する Hurwitz zeta 関数の値分布の独立性

\quad が代数的無理数の場合、 $\quad(s, \quad)$ の値分布については不明な点が数多く残されている。報告者は以前(2008)、半平面 $\text{Re}(s)>1$ 上では $\quad(s)$ と $\quad(s, \quad)$ との間に値分布の独立性が成立することを証明した。本研究期間中に Y. Lee 氏との共同研究において上記結果を改良し、代数的無理数 $\quad_j(1 \quad j \quad r)$ 間に Q 上の独立性を仮定するならば、対応する $\quad(s, \quad_j)$ 間に $\text{Re}(s)>1$ における値分布の独立性が成立することを証明した。本結果については学会発表 \quad で報告している。また論文を雑誌 Journal of the Mathematical Society of Japan に投稿、掲載が決定している。

(6) 実指標に付随する L 関数の同時普遍性と類数分布の稠密性

名越氏との共同研究で次の結果を得ている。 $e_j(1 \quad j \quad r)$ を相異なる正の判別式とする。集合 K 、関数 $f_j(s)$ は成果(1)と同じ仮定を満たすものとする。このとき適切な判別式 d を選べば、各 $f_j(s)$ は Dirichlet L 関数 $L(s, \quad_j)$ により一様近似できる。ここで \quad_j は積 de_j を法とする実 Dirichlet 指標ある。この結果の応用として、 r 個の 2 次体の判別式の列 $\{h(de_j):d>0\}(1 \quad j \quad r)$ の r 次元空間における値分布の稠密性が得られる。複数の類数の値分布を扱った結果は殆ど知られておらず、特に重要な結果であると我々は考えている。本結果についての論文は現在雑誌 Mathematische Zeitschrift に投稿中である。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 2 件)

[1] H. Mishou and H. Nagoshi, "The joint universality for pairs of zeta functions in the Selberg class", Acta Mathematica Hungarica, 査読有, 151(2), 282-327, 2017.

[2] H. Mishou and H. Nagoshi, "Joint universality for Dirichlet L-functions and zeros of their linear combinations in the \quad -aspect", Monatshefte fur Mathematik, 査読有, 183(2), 329-355. 2017.

〔学会発表〕(計 4 件)

Y. Lee and H. Mishou, "Joint denseness of Hurwitz zeta functions with algebraic irrational parameters in $\text{Rs}>1$ ", International Conference on Number Theory dedicated to the 70th birthdays of Professors Antanas Laurinčikas, Conference center "Romuva" of the Vilnius University in Lithuania, 2018.

H. Mishou, "On value-distribution of Euler-Zagier double sum at non-trivial zeros of the Riemann zeta function", Various Aspects of Multiple Zeta Functions, 名古屋大学, 2017.

H. Mishou, "On discrete universality of Hurwitz zeta functions", RIMS 研究集会「解析的整数論の諸問題と展望」, 京都大学, 2016.

H. Mishou, "Joint discrete value-distribution of Dirichlet L-functions at horizontal shifts of non-trivial zeros of the Riemann zeta function", The 6th international conference analytic and probabilistic methods in Number Theory, Conference center "Romuva" of the Vilnius University in Lithuania, 2016.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：
ローマ字氏名：
所属研究機関名：
部局名：
職名：
研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。