

令和 元年 5 月 30 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05076

研究課題名(和文) 多変数保型形式の明示的・構成的研究

研究課題名(英文) Explicit and constructive research of automorphic forms of several variables

研究代表者

青木 宏樹 (AOKI, Hiroki)

東京理科大学・理工学部数学科・准教授

研究者番号：10333189

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：多変数の保型形式は重要な研究対象であるが、その研究は一般的に1変数の場合と比べてかなり困難である。本研究は、ヤコビ形式などを用いる研究代表者独自の研究手法により、多変数の保型形式について、今まで以上の知見を得る目的で行なわれた。研究期間中に得られた成果は次のとおりである。「重みおよび指数を実数に拡張した弱ヤコビ形式の構造定理」「混合重みヒルベルト保型形式のなす加群の構造の決定」「弱ヤコビ形式のマースリフトの構成」

研究成果の学術的意義や社会的意義

多変数の保型形式は、整数論のみならず幾何学においても重要な研究対象であり、さらに近年では素粒子論においても使われはじめている。本研究では、いくつかの多変数の保型形式について、それはどのくらいあるのか、また具体的にどのような形をしているのかという問いに回答を与えた。これは保型形式そのものに関する疑問を解決したにとどまらず、上述の諸分野の研究に進展をもたらすものである。

研究成果の概要(英文)：Although automorphic forms of several variables are important research subjects, their research is generally more difficult than in the case of one variable. This research work was conducted with the purpose of obtaining more knowledge about automorphic forms of several variables by the researcher's own research method using Jacobi forms. The results obtained during this research period are as follows:  
`Structure theorem of Jacobi forms of real weights and indices' `Determination of the structures of mixed weight Hilbert modular forms' `A construction of Maass lift of weak Jacobi forms'.

研究分野：保型形式

キーワード：保型形式 ヤコビ形式 ヒルベルト保型形式

## 1. 研究開始当初の背景

多変数の保型形式は、整数論のみならず幾何学においても重要な研究対象であり、さらに近年では素粒子論においても使われはじめている。特に、1変数の保型形式と多変数の保型形式の間、あるいは多変数の保型形式どうしの間には、齋藤-黒川リフトなど、整数論的に非常に興味深い対応がいろいろと知られており、あるいは予想されており、その研究は整数論のなかでも特に重要なテーマのひとつである。もっとも、多変数の保型形式の研究は、一般的に1変数の場合と比べてかなり困難であり、1変数では解決されている多くの予想が、多変数では未解決であったり、定式化すらされずに残されたりしている。しかし近年、申請者を含む多くの研究者により、多変数の保型形式を比較的簡単に扱えるケースが次々と見つかってきた。たとえば、Borchers による無限積を用いた保型形式の構成は、ムーンシャイン予想を解決しただけでなく、整数論のさまざまな分野に応用され、また、K3曲面のモジュライの記述などにも大いに貢献した。研究代表者も、フーリエ・ヤコビ展開を用いて保型形式を調べる手法を開発し、保型形式環の構造決定問題などに成果をあげていた。他にも多くの研究者が多変数の保型形式を対象にさまざまな研究成果をあげはじめており、さらなる研究の発展が期待されている状況であった。

## 2. 研究の目的

前項で述べた学術的背景のもとに、本研究は、フーリエ・ヤコビ展開やヤコビ形式などを用いる研究代表者独自の研究手法をよりいっそう深化させることにより、多変数の保型形式について、今まで以上の知見を得ようとするものである。申請時点では、次のような項目を、具体的な研究テーマとして考えていた。

- ・多変数保型形式およびヤコビ形式におけるヘッケ作用素や跡公式の精密化
- ・Borchers 型の無限積を使った多変数保型形式の構成法の一般化、特徴付け、および拡張
- ・形式的なフーリエ・ヤコビ展開の収束性
- ・無限次元リー環の分母公式と保型形式との関連性の研究
- ・IV 型以外の領域で定義された多変数保型形式への応用

## 3. 研究の方法

多変数の保型形式を明示的・構成的に調べる手段として当初想定していたことは、保型形式のフーリエ・ヤコビ展開と、その係数としてあらわれるヤコビ形式を詳しく調べることであった。実際、最も基本的な場合である2次のジークルモジュラー形式についての研究はすでにある程度進んでおり、ジークル上半空間やIV型領域上で定義された保型形式に対しても、それに対応するヤコビ形式が知られていた。本研究課題においては、特にIV型領域上の保型形式と、それに対応するヤコビ形式をメインに扱いたいと考えていたが、その理由は、IV型領域はカスプが1次元以下と小さく、ヤコビ形式が元の保型形式の情報をより豊富に持っていると考えられるからである。が、実際に研究を始めてみると、他にも有効な手段が見つかり、それらを併用しつつ研究を行なうことになった。後述の発表論文3件のうち、2017年のものは比較的当初の方針に沿って進めた研究の成果であり、他の2件は研究途中で見つかった別手段と、さらにコンピュータによる数値計算を併用して得た成果である。

## 4. 研究成果

当初の研究目的と比べると、思いのほかうまくいった部分や、逆になかなか成果が得られなかった部分などがあるが、全般的にみれば研究はそこそこ順調に進み、3件の論文発表と、国際会議での招待講演1件を含む学会発表15件を行うことができた。期間内に得られた研究成果のなかで主要なものをいくつか以下にあげる。

- ・重みおよび指数を実数に拡張した弱ヤコビ形式の構造定理を得た。  
重みと指数が整数の場合の弱ヤコビ形式の構造定理については、既にEichler, Zagierにより精密な結果が得られていた。この構造定理は、多変数の保型形式の構造の決定、(弱ではない通常の)ヤコビ形式のなす空間の次元の決定など、さまざまな応用が知られており、非常に重要なものである。研究代表者は以前よりこの構造定理の拡張について興味を持っており、これまでの研究をさらに進めて、重みおよび指数を実数に拡張したときに弱ヤコビ形式の構造定理について精密に記述し、応用例とともに、後述の論文(2017年)として発表した。

- ・いくつかの混合重みヒルベルト保型形式のなす加群の構造の決定  
実2次体上の混合重みヒルベルト保型形式のなす空間は、重みの差を固定すれば、平行重みヒルベルト保型形式のなす環の加群とみなせる。平行重みヒルベルト保型形式の構造については、数十年前までにいくつかの場合が精密に決定されており、また次元公式なども整備されている

が、混合重みヒルベルト保型形式の構造についてはあまり研究が進んでおらず、研究代表者による若干の結果程度しか知られていなかった。しかし、本研究課題について研究を進めていくなかで、混合重みヒルベルト保型形式の構造について意外と簡単に調べられそうであることに気づき、(簡単といっても、理論上すっきりしている、また計算機に乗せるレベルでは簡単に結果がうまく得られるかどうか調べられるという話であり、手計算ではかなり面倒であるため) コンピュータ代数における理論と実践に詳しく、同時に保型形式の専門家である竹森翔さん(当時、マックスプランク研究所(ドイツ) 研究員)に共同研究を持ちかけ、およそ1年で、当初の研究代表者の予想をはるかに超えた多くの場合について構造の決定に成功し、論文(2018年、2019年)などとして発表した。この研究成果は、より多変数の保型形式の構造を調べるときに役立つデータを与えているほか、研究結果自体がヒルベルト保型形式の構造についてのいくつかの予想を提起している点でも面白いと思っている。なお、本研究については、研究代表者はコンピュータ代数についてさほど詳しくなく、コンピュータ代数に詳しい竹森さんの協力なしには成し得なかった成果であることを強調しておきたい。

・弱ヤコビ形式のマースリフトの構成(研究継続中)

2変数の保型形式であるヤコビ形式は、一般にマースリフトと呼ばれるある種の操作を行なうと、次数2の(正則な)ジーゲル保型形式が得られる。この操作は、形式的には弱ヤコビ形式に対しても行なえるが、実際には、操作中にあらわれる無限級数が収束せず、うまくいかないとされてきた。研究代表者は、弱ヤコビ形式に対してマースリフトを行なうと、有理型のジーゲル保型形式があらわれるであろうと予想し、現時点では、限られた場合についてのみ、その予想が正しいことを証明した。この研究については、そのときどきの進捗状況をいくつかの研究集会で発表し、他の専門家と研究討論を行なった。本研究については、海外の素粒子論の研究者から問い合わせを受けるなど、他分野からも興味を持たれているようである。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 3件)

Aoki, H. and Takemori, S., The structure of mixed weight Hilbert modular forms, *Int. J. Math.* 30-2(2019). (査読あり)  
<https://doi.org/10.1142/S0129167X19500083>

Aoki, H., On mixed weight Hilbert modular forms and their structure theorem, 保型形式の解析的・数論的研究(京都, 2018), 数理解析研究所講究録 2100, 65-79. (査読なし)  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2100-07.pdf>

Aoki, H., On Jacobi forms of real weights and indices, *Osaka J. Math.* 54-3(2017), 569-585. (査読あり)  
<https://projecteuclid.org/euclid.ojm/1502092828>

[学会発表](計 15件)

Aoki, H., A short survey on elliptic modular forms, IPMU Special Seminar `Elliptic Artin groups I, II', 東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構(IPMU), 2019.

Aoki, H., On Maass lifts of weak Jacobi forms, Seminar on automorphic forms in Mannheim University, Mannheim University (Mannheim, Germany), 2019.

Aoki, H., On mixed weight Hilbert modular forms and their structure theorem, 保型形式の解析的・数論的研究(京都, 2018), 数理解析研究所講究録 2100, 65-79. Aoki, H., ワイエールシュトラスのペー関数の一般化と弱ヤコビ形式のマースリフトについて, 2018 大分鹿児島整数論研究集会, 鹿児島大学, 2018.

Aoki, H., 弱ヤコビ形式のマースリフトについて, 京都大学数論合同セミナー, 京都大学, 2018.

Aoki, H., 混合重みヒルベルト保型形式の構成と全体構造の決定について, Automorphic forms/representations on covering groups, 岡山大学, 2018.

Aoki, H., On the structures of mixed weight Hilbert modular forms on real quadratic fields, Workshop On Jacobi Forms and Applications, University of Nottingham (UK), 2018.

Aoki, H., On the structure theorem for modular forms ... Igusa 's result and beyond, Local zeta functions and the arithmetic of moduli spaces: A conference in memory of Jun-Ichi Igusa, Johns Hopkins University, Baltimore, USA, 2017.

Aoki, H., On the structure of mixed weight Hilbert modular forms, Seminar Aachen-Bonn-Koeln-Lille-Siegen on Automorphic Forms, Max-Planck-Institut fuer Mathematik (Germany), 2017.

Aoki, H., ヤコビ形式の簡単な紹介, 神楽坂代数セミナー, 東京理科大学, 2017.

Aoki, H., 簡単な代数学の知識だけで進むヒルベルト保型形式の話, 九大代数学セミナー, 九州大学, 2017.

Aoki, H., On the structure of Hilbert modular forms with discriminant 5, Oberseminar Modulfunktionen, Heidelberg University (Heidelberg, Germany), 2016.

Aoki, H., A remark on the structure of mixed weight Hilbert modular forms, Seminar on automorphic forms in Mannheim University, Mannheim University (Mannheim, Germany), 2016.

Aoki, H., ヤコビの三重積を保型形式の立場から見てみる, 新潟代数セミナー, 新潟大学, 2016.

Aoki, H., ヤコビ形式の無限積表示について, 愛知数論セミナー, 名古屋工業大学, 2016.

Aoki, H., 実数重み・実数指数のヤコビ形式について, 大阪大学整数論保型形式セミナー, 大阪大学, 2016.

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

取得状況(計 0件)

〔その他〕

本研究課題の科学研究費補助金を使用して開催した研究集会(計 1件)  
第19回整数論オータムワークショップ「Archimedean local theory of automorphic forms」  
2016年11月02日~2016年11月06日 白馬ハイマウントホテル(長野県・白馬村)

本研究課題に関連するホームページ

<https://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/ha/index-j.html> 研究代表者のページ

<https://www.tus.ac.jp/ridai/doc/ji/RIJIA01.php> 東京理科大学研究者情報データベース

## 6. 研究組織

本研究課題は、基本的に、研究代表者個人で遂行された。  
しかしながら、研究討論や研究情報の交換などにおいて、下記連携研究者をはじめとする多くの研究者に本研究課題の遂行を助けていただいたことは間違いなく、あらためて感謝申し上げます。

### (1)研究分担者

なし

### (2)研究協力者

研究協力者氏名：林田 秀一 (連携研究者)

ローマ字氏名：(HAYASHIDA Shuichi)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。