

令和 5 年 5 月 10 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2022

課題番号：16K05077

研究課題名(和文)ゼータ関数の値分布と無限分解可能分布など関連する研究

研究課題名(英文) Research related to value distribution of zeta function and infinitely divisible distribution

研究代表者

中村 隆 (Nakamura, Takashi)

東京理科大学・教養教育研究院野田キャンパス教養部・准教授

研究者番号：50532355

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：研究内容は大きく5つに分けられる。

(1) 多重ゼータ関数の値の明示公式，値の関係式，関数関係式。(2) ゼータ関数の値分布，主に普遍性。

(3) ゼータ関数の零点。(4) ゼータ関数の関数等式。(5) ゼータ関数と無限分解可能性。

特に(4)は16K05077期間中に新たに行った研究である。いずれの研究も現代数学において重要な役割を果たすゼータ関数やL関数に関連する研究であり，150年以上の長い伝統を持ち，誕生以来，世界中で活発に研究され続けている対象である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

リーマンゼータ関数と全く同じ関数等式を持ち，かつ無限個の複素零点が臨界線上にあるゼータ関数を歴史上初めて定義した。ゼータ関数の研究はゼータ分布の研究に繋がり，保険数理への応用が期待される。さらに，ゼータ関数の普遍性はその性質から機械学習への応用が期待され，実際に福岡大の天羽氏，岡山理科大学の青山氏と共同で，「制御型Loewner--Kufarev方程式の解の形 - KPZ方程式の理解に向けて - 」というタイトルで画像電子学会へ論文を投稿した。

研究成果の概要(英文)：The contents of the research can be roughly divided into five.

(1) Explicit formulas, value relational expressions, and functional relational expressions for values of multiple zeta functions. (2) Value distribution of zeta function, mainly universality. (3) Zeros of the zeta function. (4) Functional equation of the zeta function. (5) Zeta function and infinite divisibility.

In particular, (4) is new research conducted during the 16K05077 period. All of these studies are related to the zeta function and L-function, which play important roles in modern mathematics. They have a long tradition of more than 150 years, and have been actively studied all over the world since their birth.

研究分野：Zeta functions, L-functions

キーワード：ゼータ関数 L関数 関数等式 実零点 無限分解可能性 臨界線上の零点

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

これまでの研究内容は大きく5つに分けられる。

- (1) 多重ゼータ関数の値の明示公式，値の関係式，関数関係式。
- (2) ゼータ関数の値分布，主に普遍性。
- (3) ゼータ関数の零点。
- (4) ゼータ関数の関数等式。
- (5) ゼータ関数と無限分解可能性。

1. 研究開始当初の背景

研究(1)の背景

Euler-Zagier 型多重ゼータ値の発端は Euler による 1775 年の論文である。量子群や結び目不変量、数論幾何学など多方面との関連により、1990 年代に入ってから再び注目されるようになった。Euler-Zagier 型ゼータ関数の発端は Atkinson の 1949 年の論文であり、Riemann ゼータ関数の 2 乗平均の研究に利用された。

Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の一般化である Witten ゼータ関数は量子ゲージ理論に関連して Witten により定義され、Zagier が再定式化し、Matsumoto により多変数関数として再定義された。この Witten ゼータ関数の特別な場合が Tornheim 多重ゼータ関数である。現在ではルート系のゼータ関数、Schur 多重ゼータ関数など様々な多重ゼータ関数が研究されている。

研究(2)の背景

ゼータ関数の普遍性とは、任意の零点を持たない正則関数は Riemann ゼータ関数の虚部方向の平行移動 $\zeta(s+i\tau)$ により一様に近似でき、さらに近似できる τ の密度は正になるという定理である。この定理は 1975 年に Voronin により証明された。任意の複素数を近似できるという形では、1914 年に Bohr が Courant との共著で示している。

1922 年に Bohr は Dirichlet L 関数 $L(s, \chi)$ は絶対収束域 $\text{Re}(s) > 1$ で概周期性を持つことを示した。さらに Bohr は、主指標でない場合、Dirichlet L 関数が $1/2 < \text{Re}(s) < 1$ で概周期性を持つことと、 $1/2 < \text{Re}(s) < 1$ で零点を持たないこと、即ち一般化された Riemann 予想が同値であることも示した。

その後 1982 年に Bagchi は Riemann ゼータ関数についても、概周期性と Riemann 予想が同値であることを示した。より詳しく言えば、Riemann 予想は Riemann ゼータ関数が自己近似性を持つ、即ち Riemann ゼータ関数の虚部方向の平行移動 $\zeta(s+i\tau)$ により Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ が近似される、と同値であることを示した。

研究(3)の背景

Riemann ゼータ関数の零点は 1859 年の Riemann 自身による論文が発端となり、現在では Riemann 予想と呼ばれ、現代数学で最も重要な未解決問題として認識されている。ゼータ関数の零点に関する研究は現在大まかに 3 つの流れがあると考えている。(3-1) Riemann 予想を支持するような命題を証明する、例えば Riemann ゼータ関数の零点の多くは臨界線上にある、などを示す。(3-2) Riemann ゼータ関数ではないが、ゼータ関数と呼ばれる零点を研究する、例えば Hurwitz ゼータ関数の零点を調べるなどがある。(3-3) Riemann 予想を仮定して Riemann ゼータ関数の零点についてさらに詳しい性質を調べる、例えば相関予想などの研究がある。

研究(4)の背景

Riemann ゼータ関数の関数等式は 1859 年の Riemann 自身の論文にまで遡る。1921 年に Hamburger は Riemann ゼータ関数は関数等式とその他の付随的な条件により特徴づけられるものであることを示した。この結果は多大な反響を呼び、Hecke や Siegel などにより、証明の簡略化や主定理の類似の提唱や一般化などがされた。一方、Knopp は (Invent. Math, 1994) において、「付随的な条件」を外した場合、Riemann ゼータ関数の関数等式と全く同じ型の関数等式を持つ Riemann ゼータ関数でない関数の存在を示した。Knopp はそのような関数の存在を示しただけであり、具体的な関数を与えていないことを注意しておく。

研究(5)の背景

確率論分野においてゼータ分布というものが知られている。これは Riemann ゼータ関数を正規化したものを特性関数として持つ分布のクラスとして定義され、古くは 1930 年代後半の文献から記録が残っている。しかし、この分布は 20 世紀の間に多くの注目を浴びることはなく、紹介される文献においてもわずかの性質について記載されているに留まっている。2000 年代に入ると、Hurwitz ゼータ分布が導入され、その無限分解可能性についての研究が行われている。

2. 研究の目的

ゼータ関数や L 関数の数論的性質を明らかにし、保険数理や機械学習への応用を探ることを研究目的としている。

3. 研究の方法

理論系であるので、自分の頭で考えることが主となるが、時には計算機による数値実験も行う。

4. 研究成果

2022 年から 2016 年までの査読付き論文で重要なものの概要をここに記す。

T. Nakamura, 'Functional equation and zeros on the critical line of the quadrilateral zeta function', J. Number Theory. 233 (2022), 432--455.

1921 年に Hamburger は Riemann ゼータ関数は関数等式とその他の付随的な条件により特徴づけられるものであることを示した。Knopp は (Invent. Math, 1994) において、「付随的な条件」を外した場合、Riemann ゼータ関数の関数等式と全く同じ型の関数等式を持つ Riemann ゼータ関数でない関数の存在を示したが、具体的な関数は与えていない。この論文では、Riemann ゼータ関数の関数等式と全く同じ型の関数等式を持つゼータ関数を明示的に与え、さらに無限個の零点が臨界線上に存在することを示した。

T. Nakamura, 'Rapidly convergent series representations of symmetric Tornheim double zeta functions', Acta Math. Hungar. 165 (2021), 397--414.

下記の論文とは異なる形の対称 2 重 Tornheim ゼータ関数を定義し、その性質を調べた。具体的には、対称 2 重 Tornheim ゼータ関数対称の急速収束級数表示を示し、その系としてそれらの関数の極を決定した。その極の情報を利用して、Tornheim 2 重ゼータ関数 $T(s, s, s)$ はリーマンゼータ関数の多項式で書けないことを証明した。対照的に、関数 $T(0, 0, s)$ や $T(0, s, s)$ はリーマンゼータ関数の多項式として明示的に書くことができることは良く知られている。

T. Nakamura, 'Symmetric Tornheim double zeta functions', Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. 91 (2021), no. 1, 5--14.

この論文において、対称 2 重 Tornheim ゼータ関数を定義し、その性質を調べた。対称 2 重 Tornheim ゼータ関数はオリジナルの Tornheim 2 重ゼータ関数より極が少ないことを示した。さらに対称 2 重 Tornheim ゼータ関数とオリジナルの Tornheim 2 重ゼータ関数の新しい急速収束級数表示を証明した。

Y. Lee, T. Nakamura and L. Pankowski, 'Selberg's orthonormality conjecture and joint universality of L-functions', Mathematische Zeitschrift. 286 (2017), no. 1-2, 1--18.

Pankowski 氏と共同で、 λ を複素数とすると、 $\zeta(s + i\lambda + i\tau)$ は $\zeta(s + i\tau)$ を近似できるかという問題を考えた。これまでの多くは 2 つのゼータ関数は 2 つとも絶対収束域又は臨界領域の場合だけ考察されていたが、今回は一つは絶対収束域、もう一つは臨界領域という場合も議論した。この論文でお互いに近似できない例も得られている。

T. Nakamura, 'Zeros of polynomials of derivatives of zeta functions', Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017), no. 7, 2849--2858.

$\text{Re}(s) > 1/2$ で絶対収束する Dirichlet 級数を係数に持つ $\zeta(s)$ の多項式の微分は $\text{Re}(s) > 1/2$ において無限個の零点を持つことを示した。この系として、種々のゼータ関数とその微分は無限個の零点を持つことが示された。さらに $\zeta(s) + 100s$ や $\exp(\zeta(s))$ などの上記の条件を充たさないゼータ関数から作られる関数は、 $\text{Re}(s) > 1/2$ において零点を持たないことを明記した。

T. Nakamura and L. Pankowski, 'Effective version of self-approximation for the Riemann zeta-function', Mathematische Nachrichten. 290 (2017), no. 2-3, 401--411.

Riemann ゼータ関数の自己近似性は、Riemann 予想との関連から重要であるが、この論文では Riemann ゼータ関数の自己近似性を定量的に評価した。具体的には有理数列と代数的無理数列についての下からの定量的評価である。いずれも数列が 0 に収束するとき、近似できる集合の密度も 0 に収束してしまう。もし仮に、密度が 0 でないと示すことができれば、Riemann 予想は正しいことになる。

T. Nakamura, 'Real zeros of Hurwitz-Lerch zeta functions in the interval $(-1, 0)$ ', Journal of Mathematical Analysis and Applications. 438 (2016), no. 1, 42--52.

Hurwitz-Lerch ゼータ関数が開区 $(-1, 0)$ 上の実零点を持つための必要充分条件を決定した。下記の論文では条件に $1/2$ が現れ、その解釈は色々考えられたが、この論文により条件には 2 番目のベルヌーイ多項式の零点が関わることがはっきりしたため、 $1/2$ は 1 番目のベルヌーイ多項式の零点であると結論付けられた。さらに Hurwitz-Lerch ゼータ関数の関数等式の簡単な新しい証明を与えた。

T. Nakamura, 'Real zeros of Hurwitz-Lerch zeta and Hurwitz-Lerch type of Euler-Zagier double zeta functions', Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 160 (2016), no. 1, 39--50.

この論文では Hurwitz-Lerch ゼータ関数と Hurwitz-Lerch 型 Euler-Zagier 2 重ゼータ関数の実零点について研究を行った。Hurwitz-Lerch ゼータ関数は Dirichlet L 関数とも関連があり、その実零点は数論的に極めて重要な対象であると考えられる。さらに同様な手法により Hurwitz-Lerch 型 Euler-Zagier 2 重ゼータ関数の実零点について研究した。多重ゼータ関数については負の整数点の研究を除けば、実零点に関連する結果は史上初である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 5件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Takashi Nakamura	4. 巻 165
2. 論文標題 Rapidly convergent series representations of symmetric Tornheim double zeta functions.	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Acta Math. Hungar.	6. 最初と最後の頁 397--414
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10474-021-01189-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takashi Nakamura	4. 巻 233
2. 論文標題 Functional equation and zeros on the critical line of the quadrilateral zeta function.	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 J. Number Theory	6. 最初と最後の頁 432--455
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2021.06.017	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nakamura Takashi	4. 巻 online
2. 論文標題 Symmetric Tornheim double zeta functions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg	6. 最初と最後の頁 online
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s12188-021-00232-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nagoshi, Hirofumi; Nakamura, Takashi	4. 巻 241
2. 論文標題 on-universality of the Riemann zeta function and its derivatives when $\sigma \geq 1$	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Approximation Theory	6. 最初と最後の頁 57--62
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jat.2019.01.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Lee Yoonbok, Nakamura Takashi, Pankowski Lukasz	4. 巻 286
2. 論文標題 Selberg's orthonormality conjecture and joint universality of L-functions	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 1~18
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-016-1754-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Nakamura Takashi	4. 巻 145
2. 論文標題 Zeros of polynomials of derivatives of zeta functions	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proc. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 2849~2858
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/13460	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nakamura Takashi, Pankowski Lukasz	4. 巻 290
2. 論文標題 Effective version of self-approximation for the Riemann zeta function	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 401~414
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/mana.201400107	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Lee Yoonbok, Nakamura Takashi, Pankowski Lukasz	4. 巻 69
2. 論文標題 Joint universality for Lerch zeta-functions	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 153~161
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Takashi Nakamura, Lukasz Pankowski	4. 巻 284
2. 論文標題 On complex zeros off the critical line for non-monomial polynomial of zeta-functions	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 23--39
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-016-1643-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Takashi Nakamura	4. 巻 19
2. 論文標題 Hurwitz-Lerch zeta and Hurwitz-Lerch type of Euler-Zagier double zeta distributions	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability	6. 最初と最後の頁 12
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219025716500296	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takashi Nakamura	4. 巻 438
2. 論文標題 Real zeros of Hurwitz-Lerch zeta functions in the interval $(-1,0)$	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 42--52
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2016.01.068	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takashi Nakamura	4. 巻 160
2. 論文標題 Real zeros of Hurwitz-Lerch zeta and Hurwitz-Lerch type of Euler-Zagier double zeta functions	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society	6. 最初と最後の頁 39--50
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0305004115000547	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takashi Nakamura, Lukasz Pankowski	4. 巻 433
2. 論文標題 Value distribution for the derivatives of the logarithm of L -functions from the Selberg class in the half-plane of absolute convergence	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 566--577
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2015.08.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計19件(うち招待講演 11件/うち国際学会 13件)

1. 発表者名 Takashi Nakamura
2. 発表標題 L -functions with Riemann's functional equation and real zeros of Dirichlet L -functions
3. 学会等名 13th International Symposium of Natural Science, Incheon National University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takashi Nakamura
2. 発表標題 Bounds for the Tornheim double zeta function
3. 学会等名 九大多重ゼータセミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takashi Nakamura
2. 発表標題 Bounds for the Tornheim double zeta function
3. 学会等名 第15回ゼータ若手研究集会 (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takashi Nakamura
2. 発表標題 Rapidly convergent series representations of symmetric Tornheim double zeta functions
3. 学会等名 解析的整数論とその周辺 (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takashi Nakamura
2. 発表標題 On real zeros of zeta functions composed by the Hurwitz and periodic zeta functions
3. 学会等名 第14回ゼータ若手研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takashi Nakamura
2. 発表標題 On the quadrilateral zeta function
3. 学会等名 解析的整数論の展望と諸問題
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takashi Nakamura
2. 発表標題 Symmetric Tornheim double zeta functions
3. 学会等名 Number Theory Down Under 7 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takashi Nakamura
2. 発表標題 Symmetric Tornheim double zeta functions
3. 学会等名 関西多重ゼータ研究会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takashi Nakamura
2. 発表標題 Functional equations and zeros of the bilateral Hurwitz and periodic zeta functions
3. 学会等名 International Conference on Number Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takashi Nakamura
2. 発表標題 Symmetric Tornheim double zeta functions
3. 学会等名 理研数論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takashi Nakamura
2. 発表標題 Zeta distributions generated by Dirichlet series and their (quasi) infinite divisibility
3. 学会等名 第12回ゼータ若手研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takashi Nakamura
2. 発表標題 Functional equations and zeros of the bilateral Hurwitz and periodic zeta functions
3. 学会等名 解析的整数論とその周辺 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Nakamura Takashi
2. 発表標題 Selberg's orthonormality conjecture and joint universality of L -functions
3. 学会等名 3rd Japanese-German Number Theory Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Nakamura Takashi
2. 発表標題 On zeros of derivatives of the prime zeta-function
3. 学会等名 Number Theory Week 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Nakamura Takashi
2. 発表標題 Non universality of the Riemann zeta function when $\sigma \geq 1$
3. 学会等名 One day seminar on analytic number theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takashi Nakamura
2. 発表標題 Non universality of the Riemann zeta function when $\sigma \geq 1$
3. 学会等名 French-Japanese Zeta Functions (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takashi Nakamura
2. 発表標題 Universality of the Riemann zeta function in the region of absolute convergence
3. 学会等名 8-th Internitinal Symposium on Natural Science (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Takashi Nakamura
2. 発表標題 主に2重ゼータ又はL値と関数について、自分の古い結果を中心に
3. 学会等名 第10回多重ゼータ研究集会 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takashi Nakamura
2. 発表標題 リーマンゼータ関数の絶対収束領域における普遍性
3. 学会等名 解析的整数論の諸問題と展望 (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Hidehiko Mishou, Takashi Nakamura, Masatoshi Suzuki, and Yumiko Umegaki	4. 発行年 2020年
2. 出版社 Mathematical Society of Japan	5. 総ページ数 411
3. 書名 Various Aspects of Multiple Zeta Functions - in honor of Professor Kohji Matsumoto's 60th birthday	

〔産業財産権〕

〔その他〕

https://sites.google.com/site/takashinakamurazeta/ Takashi Nakamura

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
Poland	Adam Mickiewicz University		