

令和 2 年 6 月 22 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05080

研究課題名（和文）代数体の絶対ガロワ群への岩澤理論によるアプローチ

研究課題名（英文）Iwasawa theoretic approach to the absolute Galois groups of number fields

研究代表者

尾崎 学 (Ozaki, Manabu)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：80287961

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,700,000円

研究成果の概要（和文）：本研究において代数体の絶対ガロワ群の研究に岩澤理論的なアプローチを導入して、(1) Neukirch-内田の定理の無限次代数体への拡張、(2) 代数体のDedekindゼータ関数の絶対ガロワ群の比較的小さな商からの決定、(3) 虚2次体の $Z_2$ -拡大体上の最大不分岐2-拡大に対する非自由予想の証明などの研究成果を得ることに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究によって代数的整数論における岩澤理論的な手法の有効性をさらに高めることができ、今後の研究に対して新たな方向付けを与えることができた。

研究成果の概要（英文）：By introducing Iwasawa theoretic method to the study of the absolute Galois groups of number fields, I have succeeded in (1) generalizing the Neukirch-Uchida theorem to number fields of infinite degrees, (2) characterizing Dedekind zeta functions from small quotients of the absolute Galois groups, (3) establishing freeness conjecture for the imaginary quadratic fields.

研究分野：数論

キーワード：岩澤理論 ガロワ群 代数的整数論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

代数体の絶対ガロワ群の理解は数論の究極の目標の一つであり、これまで様々な観点と手法によって研究が行われてきた。古典的な類体論によって絶対ガロワ群のアーベル商の算術は十分に理解できたと言いうことができるが、非アーベル商に関しては20世紀以降大きな進展が続いてはいるものの未だ十分とは言えない状況である。

岩澤理論は1950年代に岩澤健吉によって創始された理論で、その特徴は $Z_p$ -拡大という無限次拡大を足掛かりとして代数体の制限分岐アーベル拡大の深い理解をもたらすものであり、現在においても数論研究に大きな影響を与え続けている。

古典的な代数体の岩澤理論の対象は基礎体の $Z_p$ -拡大体上の制限分岐アーベル $p$ -拡大であるから、そこでは既にメタアーベル $p$ -拡大という非アーベル拡大のガロワ群が登場していた。この観点をさらに発展させたのが報告者によって開始された非アーベル岩澤理論であり、 $Z_p$ -拡大体上の制限分岐 $p$ -拡大(一般に非アーベル)を扱う試みである。

本研究は岩澤理論的なアプローチで新たな角度から絶対ガロワ群の理解に取り組むものである。

### 2. 研究の目的

具体的な研究目的は以下の通りである：

- (1) Neukirch-内田の定理「有限次代数体の絶対ガロワ群の群論的な構造がその代数体を完全に特徴づける」を無限次代数体にまで拡張すること。
- (2) 代数体のDedekindゼータ函数をその体の絶対ガロワ群のなるべく小さな商で特徴づけること。
- (3) 代数体の制限分岐拡大(特に不分岐拡大)のガロワ群の構造に関して新たな知見を得ること。

### 3. 研究の方法

本研究の研究方法の基盤は岩澤理論的なアプローチ「無限次代数体の情報を有限次代数体にまで降下させる」である。これに基づいて様々な数学的手法を駆使することにより、目標を達成する。

### 4. 研究成果

本研究によって得られた研究成果は以下の通りである：

(1) 有限次代数体の体同型類は、その絶対Galois群の最大可解商の群構造で特徴付けられることがNeukirch-内田-池田-岩澤の定理によって知られている。そこで有限次代数体の体同型よりも弱い同値関係である算術的同値(すなわちDedekindゼータ函数の一致)に関する同値類を絶対Galois群の言葉で特徴付けるとい問題が自然に浮上する。この問題に関して次の定理が得られた：

**定理** 有限次代数体 $k, k'$ について、それらの最大アーベル拡大体上の最大冪零拡大体をそれぞれ $L(k), L(k')$ とする。このとき、 $\text{Gal}(L(k)/k)$ と $\text{Gal}(L(k')/k')$ が同型ならば $k$ と $k'$ は算術的同値である。言い換えると、有限次代数体 $k$ のDedekindゼータ函数は $\text{Gal}(L(k)/k)$ の群構造から完全に決定される。

系として次が得られる：

**系** 有限次代数体 $k, k'$ について、 $k$ は有理数体上正規拡大であり、 $\text{Gal}(L(k)/k)$ と $\text{Gal}(L(k')/k')$ は同型であるならば、 $k=k'$ が成立する。

(2) 「有限次代数体 $k$ の円分的 $Z_p$ -拡大体 $K$ 上の最大不分岐 $p$ -拡大のGalois群は、非可換自由 $\text{pro-}p$ -群にはならないであろう」という非自由予想は代数体の非アーベル不分岐拡大を対象とする非アーベル岩澤理論における重要な問題である。この予想にに取り組み部分的な成果を得た。具体的には $p=2$ 、 $k$ が虚2次体の場合に非自由予想が正しいことを示すことに成功した。

(4)

**定理**  $k$ を有理数体 $Q$ の総虚な有限次Galois拡大で、 $Q$ の円分的 $Z^\wedge$ -拡大 $Q_\sim$ ( $Z^\wedge$ は $Z$ の副有限

完備化)との共通部分が  $Q$  であるものとする .そして  $k_{\sim}:=kQ_{\sim}$  として , $L/k_{\sim}$  を最大不分岐 Abel 拡大とする .このとき , $X(k)=\text{Gal}(L/k_{\sim})$  の  $\text{Gal}(k_{\sim}/k)$ -加群としての構造が  $k$  を完全に特徴付ける .すなわち  $k_1, k_2$  が有理数体の総虚な有限次 Galois 拡大であり  $X(k_1)$  と  $X(k_2)$  が  $\text{Gal}(Q_{\sim}/Q)$ -加群として同型であれば  $k_1=k_2$  が成立する .ここで  $\text{Gal}(k_{\sim 1}/k_1)$  および  $\text{Gal}(k_{\sim 2}/k_2)$  は自然に  $\text{Gal}(Q_{\sim}/Q)$  と同一視しておく .

円分的  $Z^{\wedge}$ -拡大の有限体上の 1 変数代数函数体  $F$  における類似は係数体の代数閉包までの係数拡大  $F_{\sim}$  ,  $X(k)$  の類似物は  $F$  の標数と異なる素数  $l$  に関する  $l$ -Tate 加群  $T_l(F)$  であり , この定理は Tate の定理「 $T_l(F)$  の  $\text{Gal}(F_{\sim}/F)$ -加群構造が  $F$  に付随する Jacobi 多様体  $J(F)$  の同種類を決定する」の類似と見なせる .

( 4 )  $Z_p$ -拡大体上の最大不分岐  $p$ -拡大の Galois 群の降中心列の隣接商は高次岩澤加群と呼ばれ , 古典的岩澤理論における岩澤加群の非アーベル的な一般化である . 高次岩澤加群の  $Z_p$ -階数 ( 高次岩澤 不変量 ) は極めて重要で興味深い数論的对象であるが , その性質は未だ解明されておらず , 実例も殆ど知られていない . 例えば 3 次以上の高次岩澤 不変量  $\wedge^{(i)}$  についてはそれらが正になる  $Z_p$  拡大が存在するかどうかすら判っていなかった . 本研究によって  $\wedge^{(3)}$  が随意に大きい  $Z_p$ -拡大を構成することに成功した .

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Manabu Ozaki	4. 巻 B64
2. 論文標題 Non-abelian Iwasawa theory of $Z_p$ -extensions---overview and outlook. (Japanese)	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu,	6. 最初と最後の頁 313-330
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Anderson, Daniel D.; Aoki, Takashi; Izumi, Shuzo; Ohno, Yasuo	4. 巻 47
2. 論文標題 A GCD and LCM-like inequality for multiplicative lattices	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Tamkang J. Math.	6. 最初と最後の頁 261-270
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5556/j.tkjm.47.2016.1822	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 1件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 尾崎 学
2. 発表標題 ある種の無限次代数体の絶対Galois群について
3. 学会等名 北陸数論研究集会2016（招待講演）
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

6. 研究組織

氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考