

令和 6 年 5 月 25 日現在

機関番号：32606

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2023

課題番号：16K05090

研究課題名（和文）Q-Fano 3-foldの分類

研究課題名（英文）Classification of Q-Fano 3-folds

研究代表者

高木 寛通 (Takagi, Hiromichi)

学習院大学・理学部・教授

研究者番号：30322150

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：高々終着特異点しか持たず反標準因子が豊富な3次元射影多様体をFano 3-foldと呼び、その中で、反標準因子がQ-Cartier因子の数値同値類のなす群を生成するものを素Fano 3-foldと呼ぶ。研究期間内では、素Fano 3-foldのうち、重み付き射影空間の中で余次元4のものの分類について精力的に研究してきた。そのようなものは143個のクラスに分かれ、さらに、その各々のクラスに、 $P2 \times P2$ に関係あるもの、 $P1 \times P1 \times P1$ に関係するものの2種が存在すると期待されている。研究期間内の成果は、141個のクラスに対して、 $P2 \times P2$ に関係する例を組織的に構成したことである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Fano 3-foldの分類は、Gino Fanoが非特異な素Fano 3-foldの分類に成功して以来、実りある研究の歴史を持つ。特に、森理論の登場により、Fano 3-foldは、3次元射影多様体のモデルの一つの重要なクラスをなすことが明らかになり、新たな意義を獲得して現在に至る。Fano 3-foldは、有限のクラスに分かれるものの、その数は膨大であることが知られており、その分類の全体像はいまだ明らかになっていない。その中で、当該研究の成果は、余次元4の素Fano 3-foldの例の組織的な構成であり、分類の全体像の一端に迫るものとして、意義あるものと言える。

研究成果の概要（英文）：A 3-dimensional projective variety with at most terminal singularities and with ample anti-canonical divisor is called a Fano 3-fold, and one such that the anti-canonical divisor generates the group of numerical equivalence classes of Q-Cartier divisors is called a prime Fano 3-fold. During my research period, I have been actively researching the classification of Fano 3-folds with codimension 4 in weighted projective spaces. It is expected that such Fano 3-folds are divided into 143 classes, and each class have two types of prime Fano 3-folds: one related to $P2 \times P2$ and one related to $P1 \times P1 \times P1$. The result obtained within the research period was to construct examples of such prime Fano 3-folds related to $P2 \times P2$ for 141 classes systematically.

研究分野：代数多様体の分類理論

キーワード：Fano 3-fold Jordan algebra triple system

1. 研究開始当初の背景

高々終着特異点しか持たず反標準因子が豊富な3次元射影多様体を **Fano 3-fold** と呼ぶ。また、その中で、反標準因子が **Q-Cartier** 因子の数値同値類のなす群を生成するものを **素 Fano 3-fold** と呼ぶ。Fano 3-fold の分類は、Gino Fano [F] が非特異な素 Fano 3-fold の分類に成功して以来、実りある研究の歴史を持つ。特に、森理論の登場により、Fano 3-fold は、3次元射影多様体のモデルの一つの重要なクラスをなすことが明らかになり、新たな意義を獲得して現在に至る。非特異素 Fano 3-fold の分類については、Gino Fano らによる双有理的手法に加え、Grassmann 多様体などの射影等質空間の中で完全交叉として実現するという、向井茂氏による分類方法[M]がある。

当該研究者は、以上のような、Gino Fano 流および向井流の非特異素 Fano 3-fold の分類を、特異点を持つ準非特異素 Fano 3-fold へ拡張することを目指して研究している。ここで Fano 3-fold が **準非特異** であるというのは、その affine 錐が原点を除いて非特異であるということであり、このとき、Fano 3-fold は商特異点のみ持つ。

準非特異である素 Fano 3-fold の数値的データの可能性の膨大なリストの存在がすでに知られていた[GRDB]。そして、重み付き射影空間において、余次元が3以下であれば、向井氏のタイプの分類が可能であることも知られていた。

余次元4の場合に関しては、現在も分類は完成していないが、Brown-Kerber-Reid [BKR]により、Gino Fano 流の双有理的手法によって、数値的データの可能性の多くのものに対して、例が構成できることが示されていた。さらに、Coughlan-Ducat[CD]により、向井流の方法で、より多くの数値的データの可能性に対して例が構成できることも示されていた。重み付き射影空間における余次元4以下の準非特異素 Fano 3-fold については、Coughlan-Ducat の研究も含め、各余次元に対して1つか2つの affine 多様体があって、その座標に様々な重みを与えて、重み付き射影多様体とし、その中で重み付き完全交叉として、素 Fano 3-fold が実現されていた。このような状況の時、この affine 多様体を素 Fano 3-fold の **key variety** と呼ぶ。なお、向井氏の結果については、射影等質空間の affine 錐を key variety と考える。

準非特異素 Fano 3-fold に関して、その余次元ではなく、商特異点のタイプに注目して分類する手法もしばしば有効である。当該研究者は、論文[T1]において、準非特異素 Fano 3-fold が $1/2(1,1,1)$ -商特異点しか持たず、その種数が2以上であれば、Gino Fano 流の分類が可能であることを示した。

2. 研究の目的

当該研究の究極の目的は、**素 Fano 3-fold の分類の完成** である。しかし、素 Fano 3-fold の数値的データの可能性は膨大である。その可能性がすべて素 Fano 3-fold として実現できるわけでないにしても、素 Fano 3-fold の類の数自体も膨大であるのは、経験上間違いない。いずれにしても、分類を遂行するためには、膨大な数値的データの可能性と向き合っていく必要はないのは確かである。そこで、分類の前段階として、数値的データの可能性の筋が良いのか悪いのかの判定を行いたいと考えた。もし、各数値的データの可能性に対して、素 Fano 3-fold の良い例が構成できれば、その可能性を実現できることが分かる上に、その例がその可能性に対するただ一つの實現方法ではないかという示唆も得られる。このとき、それは筋の良い可能性であると言えよう。そして、そうでない可能性については、直ちに筋が悪いと言えないけれども、その可能性に特化した考え方で、素 Fano 3-fold として実現可能かを調べることができる。こうした経緯から、「**各素 Fano 3-fold の数値的データの可能性に対して良い例を構成すること**」を研究期間内の目的とした。よい例とはどのような例か、それを次の「研究の方法」の項目で説明する。

3. 研究の方法

「研究開始当初の背景」の項目で説明した向井や Coughlan-Ducat の研究結果のように、ある affine 多様体を key variety として、素 Fano 3-fold を実現できれば、それをよい例と考えることにする。ここで、key variety は一意的ではないが、Coughlan-Ducat の研究結果から、素 Fano 3-fold の数値的データの可能性の数よりもずっと少ないと期待される。データ上関連が見えない素 Fano 3-fold の複数の可能性が、一つの key variety から座標の重みを変えるだけで実現されるということがしばしば起こる。そうなると、そのような素 Fano 3-fold の数値的データの可能性は、孤立していない確かな存在感を持つという意味で、筋がよいと言えよう。こうした経緯から、当該研究者にとって、「**key variety となるべき affine 多様体を見つけること**」が、よい例を構成するための研究方法となった。

4. 研究成果

研究期間内に、当該研究者が得た研究成果をグループ分けして説明する。

- ① **余次元 4 の準非特異素 Fano 3-fold に対する key variety の構成** この研究成果は、Coughlan-Ducat [CD]の結果を受けてのものである。余次元 4 の準非特異素 Fano 3-fold の数値的データの可能性は 145 個ある。そのうち一つは非特異素 Fano 3-fold の数値的データであり、この場合の分類は済んでいる。また、もう一つの数値的データは、下記の項目②の研究成果で取り扱ったので、ここでは除外して考える。項目①の研究成果は、残り 143 個の数値的データについてのものである。Brown-Kerber-Reid [BKR]や当該研究者の結果 [T1]により、これら 143 個の数値的データについては、「もし、準非特異素 Fano 3-fold が存在するならば、少なくとも 2 つ位相的に異なるものが存在し、さらに、そのうちの一つは射影平面 2 つの直積 V 、もう一つは射影直線 3 つの直積 W と関係している」と期待されていた。Coughlan-Ducat [CD]は、key variety として、cluster variety と呼ばれるものを 2 つ構成した。それらは C 型、 G 型と呼ばれている。そして、143 個の数値的データの多くのものについて、 C 型 cluster variety から V に関係する準非特異素 Fano 3-fold の例を、 D 型 cluster variety から W に関係する例を構成した。しかし、彼らの構成した cluster variety はミラー対称性に起源を持っているため、物理的な意味ははっきりしているものの、なぜそれらが V , W と関係しているのかははっきりしていなかった。また、143 個すべての数値的データに準非特異素 Fano 3-fold の例を構成しているわけではなかった。当該研究者はこの 2 点を克服すべく研究を行い、 V , W それぞれに対して新たな key variety を見出し [T4, T5, T6, T7]、 V に関係する準非特異素 Fano 3-fold の例については、141 個の数値的データに対して構成することに成功した [T8]。 W に関係する準非特異素 Fano 3-fold の例については、近い将来の研究課題として残っている。 V , W それぞれに対して key variety は、それぞれ V , W の適切な族を見出し、その全空間の affine 化として構成される。 V , W はそれぞれ 3 次形式に付随する Jordan 代数、Freudenthal 3 重系に関係している。これらの代数系を調べてみると、いくつか、自然なパラメーター付けが得られる。Jordan 代数については 3 つのパラメーター付けが得られ、それに応じて、3 つの affine variety H , Π , Σ が見つかる。これらの座標に適切な重みを与えると、141 個の数値的データに対して、準非特異素 Fano 3-fold の例が構成される。141 個のデータに対して、例の構成に必要な affine variety はわずか 3 個である。なお、この構成の副産物として、実は、 H の affine 部分多様体として、 C 型 cluster variety が得られることが分かる [T4]。よって、Coughlan-Ducat が C 型 cluster variety から構成した例は、 H から構成できる。Freudenthal 3 重系については、2 つのパラメーター付けが得られ、それに応じて、2 つの affine variety U , Z が見つかる [T7]。これらから例を構成するのは、近い将来の課題であるが、 U が G 型 cluster variety を affine 部分多様体を持つことが分かるので [T7]、少なくとも、Coughlan-Ducat が G 型 cluster variety から構成した例は、 U から構成できる。しかし、 U から、もっと多くの数値的データに対応する例が構成できるはずなので、今後、それを明らかにしたいと考えている。

- ② **$1/2(1,1,1)$ -特異点のみ持つ素 Fano 3-fold の key variety を用いた分類**
論文[T1]において分類した、 $1/2(1,1,1)$ -商特異点しか持たず、種数が 2 以上の準非特異素 Fano 3-fold のうちの 5 つの類の属するものそれぞれに対して、key variety を構成し、それぞれの類に属する素 Fano 3-fold はいつでも key variety のある重み付き射影化の重み付き完全交叉として得られるということを示した [T2]。この結果は、①とは違い、分類結果である。5 つの類のうちの一つは、余次元 4 の素 Fano 3-fold の類である。論文[T1]において得られた Gino Fano 流の素 Fano 3-fold の分類法をよく見ると、素 Fano 3-fold を比較的自然に高次元に拡張することができ、それによって、各場合の key variety が構成される。さらに、論文 [T3]では、key variety の射影双対というべき多様体を構成し、それによって、Gino Fano 流の素 Fano 3-fold の分類によって得られたデータに新たな意味付けを行った。

次に挙げる研究成果は、素 Fano 3-fold の分類のテーマとは外れるが、Fano 3-fold をよく調べていた経験を生かすことで得られたものである。

- ③ **超楕円曲線とその上の theta characteristic の対のモジュライ空間について** Udine 大学の Francesco Zucconi 氏との共同研究をして次の結果を得た。

種数 2 以上の超楕円の代数曲線とその上の 1 点、それから、その上の theta characteristic で大域切断を持たないもの、という 3 つ組のモジュライ空間は有理多様体である。

その手法は、ある種の概 del Pezzo 3-fold (概 Fano 3-fold の一種) 上の曲線族の代数群による商が上記の三つ組のモジュライ空間と双有理的同値であることを示し、前者の有理性を示すというものである。

【参考文献】

- [GRDB] S. Altınok, G. Brown, A. Iano-Fletcher, M. Reid, and K. Suzuki, The graded ring database, Online database, available at <http://www.grdb.co.uk/forms/fano3>.
- [BKR] G. Brown, M. Kerber and M. Reid, Fano 3-folds in codimension 4, Tom and Jerry. Part I, *Compos.Math.* 148 (2012), 1171-1194.
- [CD] S. Coughlan and T. Ducat, Constructing Fano 3-folds from cluster varieties of rank 2, *Compos.Math.* 156, Issue 9, September 2020, 1873-1914.
- [F] G. Fano, Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni razionali, e aventi curve-sezioni canoniche, *Comment. Math. Helv.* 14 (1942), 202-211.
- [M] S. Mukai, New developments in the theory of Fano threefolds: vector bundle method and moduli problems, translation of *Sūgaku* 47 (1995), no. 2, 125-144], *Sugaku Expositions* 15 (2002), no. 2, 125-150.
- [T1] H. Takagi, On classification of \mathbb{Q} -Fano 3-folds of Gorenstein index 2. I, II, *Nagoya Math. J.* 167:117-155, 157 - 216 (2002).
- [T2] H. Takagi, Classification of \mathbb{Q} -Fano 3-folds of Gorenstein index 2 via key varieties constructed from projective bundles, *Internat. J. Math.* 34 (2023), no. 10, Paper No. 2350060, 47 pp.
- [T3] H. Takagi, Duality related with key varieties of \mathbb{Q} -Fano threefolds constructed from projective bundles, *Adv. Geom.* 24 (2024), no. 1, 1-17.
- [T4] H. Takagi, Key varieties for prime \mathbb{Q} -Fano threefolds defined by Jordan algebras of cubic forms. Part I, arXiv:2403.14991v2, submitted.
- [T5] H. Takagi, Key varieties for prime \mathbb{Q} -Fano threefolds defined by Jordan algebras of cubic forms. Part II, arXiv:2403.15991v2, submitted.
- [T6] H. Takagi, Key varieties for prime \mathbb{Q} -Fano threefolds related with $P^2 \times P^2$ -fibration, preprint, submitted.
- [T7] H. Takagi, Key varieties for prime \mathbb{Q} -Fano threefolds defined by Freudenthal triple systems, arXiv:2309.01057v2, submitted.
- [T8] H. Takagi, Constructing prime \mathbb{Q} -Fano threefolds of codimension four via key varieties, preprint.
- [TZ] T. Takagi and F. Zucconi, The rationality of the moduli space of one-pointed ineffective spin hyperelliptic curves via an almost del Pezzo threefold, *Nagoya Math. J.* 232 (2018), 121-150.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Hiromichi Takagi	4. 巻 24
2. 論文標題 Duality related with key varieties of Q-Fano threefolds constructed from projective bundles.	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Adv. Geom.	6. 最初と最後の頁 1-17
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/advgeom-2023-0029	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiromichi Takagi	4. 巻 34
2. 論文標題 Classification of Q-Fano 3-folds of Gorenstein index 2 via key varieties constructed from projective bundles.	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Internat. J. Math.	6. 最初と最後の頁 1-47
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0129167X2350060X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinobu Hosono and Hiromichi Takagi	4. 巻 16
2. 論文標題 Mirror symmetry of Calabi-Yau manifolds fibered by (1,8) -polarized abelian surfaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Number Theory and Physics	6. 最初と最後の頁 215--298
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/CNTP.2022.v16.n2.a1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Shinobu Hosono and Hiromichi Takagi	4. 巻 60
2. 論文標題 Derived categories of Artin-;Mumford double solids	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 107-177
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinobu Hosono and Hiromichi Takagi	4. 巻 47
2. 論文標題 Mirror Symmetry and Projective Geometry of Fourier-Mukai Partners	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advanced Lectures in Mathematics	6. 最初と最後の頁 89--130
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinobu Hosono, Bong H. Lian, Hiromichi Takagi, Shing-Tung Yau	4. 巻 14
2. 論文標題 K3 surfaces from configurations of six lines in P^2 and mirror symmetry I	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications in Number Theory and Physics	6. 最初と最後の頁 739--783
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Takagi, Hiromichi; Zucconi, Francesco	4. 巻 232
2. 論文標題 The rationality of the moduli space of one-pointed ineffective spin hyperelliptic curves via an almost del Pezzo threefold	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Nagoya Math. J.	6. 最初と最後の頁 121 - 150
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2017.23	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hosono, Shinobu; Takagi, Hiromichi	4. 巻 14
2. 論文標題 Movable vs monodromy nilpotent cones of Calabi-Yau manifolds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.	6. 最初と最後の頁 039, 37
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2018.039	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinobu Hosono and Hiromichi Takagi	4. 巻 317
2. 論文標題 Towards homological projective duality for S2P3 and S2P4	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 371-409
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2017.06.039	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinobu Hosono and Hiromichi Takagi	4. 巻 104
2. 論文標題 Double quintic symmetroids, Reye congruences, and their derived equivalence	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of Differential Geometry	6. 最初と最後の頁 443-497
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/jdg/1478138549	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 高木寛通
2. 発表標題 Constructing prime Q-Fano 3-folds of codimension 4 via Jordan algebras or Freudenthal triple systems
3. 学会等名 International workshop on Birational Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Hiromichi Takagi
2. 発表標題 On key varieties for prime Q-Fano threefolds of codimension 4
3. 学会等名 Higher-dimensional algebraic varieties (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiromichi Takagi
2. 発表標題 Key varieties for prime Q-Fano threefolds of codimension 4
3. 学会等名 Zoom Algebraic Geometry Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 高木寛通
2. 発表標題 Examples of key varieties of prime Q-Fano threefolds of codimension 4
3. 学会等名 Workshop on Calabi-Yau Varieties and Related Topics (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高木寛通
2. 発表標題 On key varieties of prime Q-Fano 3-folds
3. 学会等名 ファノ多様体及び関連する代数幾何学 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高木寛通
2. 発表標題 3次元Q-Fano多様体の分類について
3. 学会等名 京都大学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 高木寛通
2. 発表標題 On classification of prime Q-Fano 3-folds with only $1/2(1,1,1)$ -singularities and of genus less than 2
3. 学会等名 東大代数幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 高木寛通
2. 発表標題 Q-Fano 3-fold with $1/2(1,1,1)$ -singularities revisited
3. 学会等名 都の西北代数幾何学シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 高木寛通
2. 発表標題 On key varieties of Q-Fano threefolds with only $1/2(1,1,1)$ -singularities
3. 学会等名 代数的層のモジュライの研究とその周辺（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------