様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　５ 月 ２８ 日現在

機関番号：１２６０５
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ０５０９１

研究課題名（和文）森田多元環の表現とホモロジー的次元の研究

研究課題名（英文）Study on representations of Morita algebras and homological dimensions

研究代表者
山形　邦夫（YAMAGATA, Kunio）

東京農工大学・工学（系）研究科（研究院）・名誉教授

研究者番号：６００１５８４９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：大域次元有限の有限次元多元環から定義される軌道多元環に礎石同型となるフロベニウス多元環を決定するという問題と、フロベニウス多元環の一般化である森田多元環やその上の加群とについて研究した。フロベニウス多元環の環構造の問題については、ある有限次元加群を発見してフロベニウス多元環の重要な類に対し上記問題に関する解答を得ることができた。森田多元環に関する研究については、標準加群を利用して、森田多元環や自明でない支配次元をもつ有限次元多元環に対する新しい特徴付けを発見した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
フロベニウス多元環の重要性は数学の様々な分野で認識されているが、その研究には大域次元が無限であるという困難さを伴う。本研究での成果は、研究の進んでいる有限大域次元の多元環とフロベニウス多元環との関連を明らかにするものであり、また森田多元環の研究を通して中山予想という半世紀以上に渡る未解決問題の解明に関わるものである。

研究成果の概要（英文）：We studied Frobenius algebras and Morita algebras over a field. We obtained module theoretical characterizations for some Frobenius algebras to be socle equivalent to Frobenius orbit algebras determined by algebras of finite global dimension. Moreover we got new characterizations of Morita algebras and algebras of non-zero dominant dimensions in terms of their canonical bimodules.

研究分野：代数学

キーワード：有限次元多元環　フロベニウス多元環　加群　表現　クイバー　支配次元

1.研究開始当初の背景

フロベニウス多元環が多元環の軌道多元環をガロア被覆にもつための「Skowroński-Yamagata の判定定理」が 1990 年代に証明され、良いガロア被覆をもつフロベニウス多元環の構造に関する研究が進み、その結果、2008 年にフロベニウス多元環の加群圏の性質、多元環の構造などの関係を示唆する多くの未解決問題が提示された。一方、1950年代にフロベニウス多元環上の忠実加群の準同型多元環を決定した森田の定理は、2010 年以降に Ming Fang-Steffen König や Otto Kerner-代表者等によって再認識され、森田多元環の研究が始められた。

2.研究の目的

1930 年代後半に環論的な一般構造が明らかにされたフロベニウ多元環は、1970 年頃から二十年位の間に確立した現代表現論の中でも遺伝多元環と並んで特に重要な多元環の地位を占めるようになった。本研究では、体上有限次元多元環の表現論の出発となったフロベニウ多元環やそれを一般化した森田多元環などに焦点をあて、新たな観点からそれらの多元環の環としての構造や表現圏との関係や、加群のホモロジー的次元などについて調べることを目的とした。

3.研究の方法

本研究は単位元をもち結合的な体上有限次元多元環と、その上の有限次元加群を扱う。

主として、フロベニウス多元環の環としての構造を表現論的観点から行う研究と、森田多元環に関連する環論・加群論的な研究とを行った。いずれも海外研究協力者との共同研究として行い、そのために共同研究者の研究機関を訪問したり関係研究者のいる機関への滞在や国際研究集会を利用して考察検討を行い研究を実行した。

(1) フロベニウス多元環の環構造の研究は、これまで共同研究を行ってきた A. Skowroński（ポーランド）と継続して行った。

　研究内容は、加群圏の基盤を成す Auslander-Reiten クイバーの性質を利用して、ガロア被覆の存在に関する Skowroński-Yamagata の判定定理を応用するという独自の方法に依って、フロベニウス多元環と軌道多元環との関係を主に調べた。軌道多元環によって記述できない場合のフロベニウス多元環としては Hochschild 拡大多元環を主として研究した。

(2) 森田多元環の研究は、森田多元環の組織的な研究を始めたときの共同研究者 Otto Kerner（ドイツ）に加え、森田多元環の特殊な場合について研究をしていた方明（中国）との三人を中心とする共同研究として行った。

　研究内容は、多元環の標準加群を利用して、標準加群から得られる種々の加群の加群的性質やホモロジー的な次元を調べて与えられた多元環のもつ性質を求め、その結果として森田多元環の特徴的な性質を求めるという手法をとった。また中国とドイツの研究者等と森田多元環を含む多くの準同型多元環が有する新しい不変量の研究を始めた。

(3) これまでに科研費の援助のもとに行って得られた多くの研究成果を整理して世界の研究者や学習者向けの単行本として出版するために、共同執筆者や協力者の招聘や研究期間への訪問を通して、執筆の準備を行った。

4.研究成果

(1) フロベニウス多元環の構造問題について得られた主な成果は次のとおりである。

　与えられたフロベニウス多元環を A とおく。A の Auslander-Reiten クイバーの有限連結部分圏 Δ で安定切片と呼ばれるものを定義する。Δ を含む Auslander-Reiten クイバーの連結成分を Σ とおく。安定切片 Δ は射影対象を含まないものとして定義され、応用上は Σ の任意の非射影的対象の Auslander-Reiten 移動が Δ とただ一点で交わるときが重要である。さらに、安定切片と直既約射影加群の根基や礎石剰余加群との関係により、概右（左）正則や右（左）正則、正則、遺伝的などの安定切片を定義する。このとき任意の体 K 上のフロベニウス多元環 A が、(i)遺伝的かつ概右正則である安定切片をもつ、ことと(ii)遺伝的かつ概左正則である安定切片をもつ、こととは同値である；さらにこの同値な性質は、(iii)或る有限次元傾多元環 B と、その反復多元環の正自己同型写像と中山自己同型写像の合成により生成される無限巡回群とによって定まる（B の）軌道多元環に A が礎石同型となる、こととも同値であるという定理を得た。これは与えられたフロベニウス多元環の表現型（有限表現型であるか無限表現型であるか）に依存しないもので、同種の軌道多元環構造をもつフロベニウス多元環として知られている（有限あるいは無限表現型に関する）諸定理の証明の本質部分を導く。これは、上述の無限巡回群によって定まる軌道多元環に礎石同型となるフロベニウス多元環を決定する有限個の直既約加群（従って一つの有限次元加群）を発見したものであり、その証明には多元環表現論の多くの成果を必要とするにもかかわらず、定理の主張は極めて簡明なものである。したがって、これを基礎としてフロベニウス多元環の構造問題の今後の研究発展が期待できる成果と言える（発表論文①）。

一方、軌道多元環として表現できない場合も含むフロベニウス多元環の研究も行った。これについては

任意の有限次元多元環の自己双対による Hochschild 拡大多元環の構造を研究し、拡大多元環が直既約であるための条件を明らかにした。また有限次元遺伝的多元環の場合に、その自己双対による Hochschild 多元環の Auslander-Reiten クイバーの構造を具体的に決定した。それらの成果は図書①に記載した。

(2) 森田多元環に関しては、主として Kerner-Yamagata によって得られた森田多元環の理論を標準加群を用いて詳細に調べた。主な成果は次のとおりである。

体 K 上の有限次元多元環 A が森田多元環であるとは、A が或るフロベニウス多元環上の生成加群の準同型多元環に森田同値になることである。A の K 双対加群(これを D(A)で表す)の左 A 双対加群と右 A 双対加群は両側 A 加群として同型になる。これを A の標準加群とよび V で表す。

標準加群 V が片側加群として自由であるような多元環 A は明らかにされているが、本研究では V が片側加群として射影的である場合を考察し、射影的かつ V の準同型多元環が A に同型であるような多元環 A を決定した。その結果として、A が森田多元環である場合には、V が左あるいは右 A 加群として射影的である、階数1の自由加群である、自由である、等の性質はすべて同値であることを示した。双対的に V の入射性については、V が左あるいは右 A 加群として入射的であることと、余生成素であることは同値な性質で、このとき A 自身がフロベニウス多元環になることを明らかにした。

V の定義の場合とは異なり、V の左 A 双対加群と V の右 A 双対加群は一般に両側 A 加群として同型にならない。これに関して、A が森田多元環であれば、V の左 A 双対加群と V の右 A 双対加群は両側 A 加群として同型であることを明らかにした。また、A の支配次元が2以上であることを V の A 双対加群を利用して調べ、その応用として、A の支配次元が2以上であれば、A が森田多元環であることは次のいずれにも同値であることを示した：V の左 A 双対加群と右 A 双対加群は両側 A 加群として同型である、V の左 A 双対加群の左支配次元と V の右 A 双対加群の右支配次元とは共に2以上である、D(A)と左 A 加群 V とのテンソル積は右 A 加群 V と D(A)とのテンソル積に両側 A 加群として同型である。さらに、A が支配次元2以上であることは、両側 A 加群 V の左と右に A 加群 D(A)をテンソル積をすると D(A)に戻る(両側 A 加群として D(A)に同型になる)性質と同値であることを証明した。

任意の有限次元多元環上の生成余生成素の準同型多元環(森田多元環を含む)に対し、大域次元と支配次元との関係を調べるために新しい不変数を調べた。その結果、或る多元環のもつ不変量との密接な関係や支配次元に関する予想問題などに深く関係していることが分った。この新しい不変数については、特にフロベニウス多元環と支配次元とに関する中山予想との関わりを念頭に、フロベニウス多元環の場合の解明が今後の重要な研究課題となった。

以上の研究成果は、森田多元環や標準加群などの支配次元に関する新たな知見を与えるものであり、未解決問題の中山予想に接近する新しい方法を示唆するとみることもでき、その主結果はアメリカの主要総合雑誌(発表論文②)に掲載された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計2件)

① Andrzej Skowroński, Kunio Yamagata、Selfinjective algebras with hereditary stable slice、Journal of Algebra、査読有、Vol.530、2019、No.1、146−162
https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.04.010

② Ming Fang、Otto Kerner、Kunio Yamagata、Canonical bimodules and dominant dimension、Transactions of American Mathematical Society、査読有、Vol.370、No.2、2018、pp.847−872
http://dx.doi.org/10.1090/tran/6976

〔学会発表〕(計7件)

① 山形邦夫、Selfinjective orbit algebras induced from repetitive algebras, Advances in Representation Theory of Algebras VII, Mexico City (Mexico)、2018

② 山形邦夫、On selfinjective algebras socle equivalent to orbit algebras、Stuttgart大学代数高等セミナー Stuttgart (Germany)、2018

③ 山形邦夫、Morita algebras and canonical bimodules、Advances in Representation Theory of Algebras VI: geometry and homology, Luminy (France)、2017

④ 山形邦夫、On triviality of symmetric Hochschild extension algebras、Stuttgart大学代数高等セミナー Stuttgart (Germany)、2017

⑤ 山形邦夫、Indecomposable self-injective Hochschild extension algebras、清華大学表現論セミナー、Beijing (China)、2017
⑥ 山形邦夫、Indecomposable self-injective Hochschild extension algebras、首都師範大学代数・表現論セミナー、Beijing (China)、2017
⑦ 山形邦夫、Canonical bimdules of Morita algebras、The 49th Symposium on Ring Theory and Representation Theory、大阪、2016

〔図書〕（計1件）

①Andrzej Skowroński, Kunio Yamagata、European Mathematical Society Publication House, Zürich、*Frobenius algebras II: Tilted and Hochschild extension algebras*、EMS Textbooks in Mathematics, 2017、619

〔産業財産権〕

○出願状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

なし

6.研究組織

(1) 研究分担者

なし

(2) 研究協力者

① 研究協力者氏名：スコヴロンスキ　アンジェイ
ローマ字氏名：（Skowroński, andrzej）

② 研究協力者氏名：ケルナー　オットー
ローマ字氏名：（Kerner, otto）

③ 研究協力者氏名：方　明
ローマ字氏名：（Fang, ming）

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。